OPERADORES DE ONDA E DE DISPERSÃO PARA OPERADORES DIFERENCIAIS ELÍPTICOS DE ORDEM 2 EM R^m, $m > 3$

Gosula Narayana Reddy

Introdução

Neste trabalho investiga-se o problema da existência e completamento de operadores de onda e da existência do operador de dispersão, associados aos operadores diferenciais elípticos de ordem 2, $-\tilde{\Delta}$ e $\tilde{\Delta}+q(|x|)$ em R^m, $m \geq 3$ onde

$$\tilde{\Delta} = \sum_{j=1}^{m} \partial_j (p(|x|)\partial_j \ , \ \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \ .$$

Não se sabe, da literatura, nenhum resultado referente ao par $(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1)$ exceto o de Putmm [16] que tratou o par $(\mathcal{L}_{00}, \mathcal{L}_{01})$ com uma condição de fronteira em 0. Porém, vale mencionar o recente trabalho de Ikebe e Toyashi [5], que provaram a existência de operadores de onda associados a um par cuja diferença é um operador diferencial de ordem 2, que tende a zero asintoticamente quando $|x| \to \infty$. Eles também provaram o completamento de operadores de onda sob certas condições adicionais assim generalisando um resultado de Ikebe [3].

Se $p(|x|) = 1$ e a função q não é necessariamente radial vários autores (Veja [3] , [5],[6],[7] , [10] e [11]) tenham achado condições suficientes sobre q para a existência e completamento de operadores de onda . Recentemente Kato e Kuroda [9] provaram o completamento supondo

$|q(x)| \leq c\ (1 + |x|)^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, o que é um melhoramento sobre resultados anteriores.

Na seção 1 são dadas definições importantes inclusive a do operador de Schrödinger e $L^2(R^m)$ é escrito como soma direta de seus subespaços que reduzem $-\tilde{\Delta}$ e $\tilde{\Delta}+q(|x|)$. As partes destes operadores são equivalentes respectivamente aos operadores diferenciais ordinários ℓ_{ok} e ℓ_{1k} em $(0,\infty)$. Na seção 2 são achados os resolventes $(\ell_{ok}-\lambda)^{-1}$ e são obtidas estimativas de soluções de $(\ell_{ok}-\lambda)u=0$ em 0 e no ∞. Encerra-se a seção achando índices de deficiência dos operadores ℓ_{ok}. Na última seção foram

Universitas, Salvador, (23, especial)131 - 152,1978

provados os principais resultados:

i) $\mathcal{l}_{ok}$ e $\mathcal{l}_{1k}$ e portanto $-\tilde{\Delta}$ e $\tilde{\Delta}+q(|x|)$ definem operadores auto-adjuntos $\mathcal{L}_{ok}$, $\mathcal{L}_{1k}$, $\mathcal{L}_0$ e $\mathcal{L}$ respectivamente

ii) operadores de onda associados a estes pares existem e são completos.

iii) $\mathcal{L}_{ok}$ e $\mathcal{L}$ são absolutamente contínuos e o operador de dispersão dos pares acima são unitários.

Seção 1: Definições

1.1 Definições.

Seja H um espaço de Hilbert separável, em que o produto interno é denotado por $(-,-)$ e seja H um operador auto-adjunto em H com a resolução espectral $\{(\lambda)\}$, $-\infty < \lambda < \infty$ tal que $H = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)$. Seja $H_{ac}(H)$ o subespaço de continuidade absoluta em relação a H.

H é dito absolutamente contínuo, quando H se iguala a H_{ac}. A restrição de H a este subespaço, chama-se a parte absolutamente contínua de H e é denotada por H_{ac}.

Sejam $H_{0,ac}$ e $H_{1,ac}$ as partes absolutamente contínuas de H_0 e H_1 e sejam P_0 e P_1 as projeções ortogonais sobre os subespaços de continuidade absoluta de H_0 e H_1 respectivamente.

Então

$$(1.1)\quad W_{\pm} = W_{\pm}(H_1,H_0) = s - \lim_{t\to \pm\infty} e^{itH_1}\, e^{-itH_0}P_0$$

se existem, são chamados operadores de onda generalizados associados ao par (H_0,H_1) Quando W_+ e W_- existem o operador de dispersão generalizado é definido por

$$(1.2)\quad S = W_+^* W_-$$

Os operadores de $W_{\pm}$ (H_1,H_0)são ditos completos se

$$W_{\pm}\,(H_1,H_0)\quad H_{ac}(H_0) = H_{ac}(H_1)$$

Se H_0 é absolutamente contínua, isto é, $P_0=1$, operador identidade então $W_{\pm}$ e S são chamados operadores de onda próprios e operador dispersão proprio respectivamente.

1.2 Definição de operador de Schrödinger.

Nesta seção, são definidos alguns operadores formalmente. Sua investigação de ser auto-adjunto é adiada até a próxima seção. Os operadores formais são denotados por letras minúsculas.

Seja R^m o espaço Euclideano de dimensão $m \geqslant 3$. Se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m$, escreve-se $|x| = (\sum_{j=1}^{m} x^2)^{1/2}$. Seja $L^2(R^m)$ o conjunto de todas as funções complexas u de R^m tal que $\int_{R^m} |u(x)|^2 \, dx < \infty$. $L^2(R^m)$ é um espaço de Hilbert com produto $(u,v) = \int_{R^m} u(x)\overline{v(x)}dx$ para $u,v \in L(R^m)$. Seja $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ e seja $\Delta = \sum_{j=1}^{m} \partial^2$ o Laplaciano em R^m. Seja $q(x)$ uma função real de R^m. Define-se os operadores formais ℓ_0 e ℓ_1 por $(\ell u)(x) = -\Delta u(x)$ e $(\ell_1 u)(x) = -\Delta u(x) + q(x)u(x)$, para uma função u de R^m. O operador ℓ_1 é chamado operador de Schrödinger em R^m e q é chamado a função potencial.

1. 3 Separação de variáveis.

Seja $r = |x|$ para $x \in R^m$. Seja Ω a esfera unitária de R^m com centro em 0. $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{m+1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} B$, onde B é o operador Laplace- Beltrami em $L^2(\Omega)$ dado por $B = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{m} (x_j \partial_k - x_k \partial_j)^2$. As autofunções $Y_{kj}(w)$, $k = 0,1,2, \ldots$ e $j = -k, -k+1, \ldots k-1, k$, de B com os autovetores correspondentes $-k(k+m-2)$ são chamadas esféricas harmonicas. Estes formam uma família ortonormal completa em $L^2(\Omega)$. Seja $H_{kj} = \{Y_{kj}\} \otimes L^2(0,\infty,r^{m-1})$, o produto tensor do espaço uni-dimensional gerado por Y_{kj} e $L^2(0,\infty;r^{m-1})$, onde $L^2(0,\infty,r^{m-1}) = \{f: \int_0^\infty |f(r)^2 r^{m-1} dr\}$. Identificando $Y_{kj} \otimes f$ de H_{kj} com $Y_{kj} \cdot f$, o espaço H_{kj} pode ser considerado como um subespaço de $L^2(R^m)$. É válido que $L^2(R^m) = L^2(\Omega) \otimes L^2(0,\infty;r^{m-1}) = \sum_{\substack{k=0,1,2,\ldots \\ j=-k,k+1,\ldots,k}} \oplus H_{kj}$. Desde que H_{kj} reduz ℓ_0 define-se

$$\ell_{0kj}(Y_{kj} \otimes f) = \ell_0(Y_{kj} \cdot f) = Y_{kj}\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{m-1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{k(k+m-2)}{r^2} f\right)$$

para $Y_{kj} \otimes f \in H_{kj}$.

$T: H_{kj} \to L^2(0,\infty)$ definido por $T(Y_{kj} \otimes f) =$

$= r^{\frac{m-1}{2}} f(r)$ para $Y_{kj} \otimes f \in H_{kj}$ é um operador unitário de H_{kj} em $L^2(0,\infty)$

Além disso, pondo $\ell_{okj} = T\,\tilde{\ell}_{okj}\,T^{-1}$ vê-se que ℓ_{okj} é um operador diferencial ordinário em $L^2(0,\infty)$ dado por

$$(1.3)\quad \ell_{okj} = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{C_k}{r^2}$$

onde $C_k = \dfrac{(m-1)(m-3)}{4} + k(k+m-2)$.

1.4. Uma Generalização de Δ.

Considera-se a expressão diferencial

$$(1.4)\quad \tilde{\Delta} = \sum_{j=1}^{m} \partial_j (p|x|)\partial_j)$$

com as seguintes condições sobre $p(r)$:

(1.5a) $p(r)$ é real e diferenciável continuamente para todo $r \in [0,\infty)$.

(1.5b) $p(r) > C$ para todo $r \in [0,\infty)$ e para algum $C > 0$.

Se q também é radial substituindo Δ por $\tilde{\Delta}$ define-se os operadores formais $\tilde{\ell}_o$, $\tilde{\ell}_1$, $\tilde{\ell}_{okj}$, $\tilde{\ell}_{1kj}$, $\tilde{\ell}_{okj}$ e $\tilde{\ell}_{1kj}$ análogo aos sem ~. Os operadores $\tilde{\ell}_{okj}$ e $\tilde{\ell}_{1kj}$ são dadas por

$$(1.6)\quad \tilde{\ell}_{okj} = -\frac{d}{dr}\left(p(r)\frac{d}{dr}\right) + \gamma(r) \quad \text{e}$$

$$(1.7)\quad \tilde{\ell}_{1kj} = -\frac{d}{dr}\left(p(r)\frac{d}{dr}\right) + \gamma(r) + q(r)$$

onde $\gamma(r) = C_k \dfrac{p(r)}{r^2} + \dfrac{m-1}{2r}\dfrac{dp}{dr}$

Notação. Considerados como operadores formais de $L^2(0,\infty)$, os operadores ℓ_{okj}, ℓ_{1kj}, $\tilde{\ell}_{okj}$ e $\tilde{\ell}_{1kj}$ não dependem de j. Sempre que seja limitada a discussão aos operadores $L^2(0,\infty)$, j deixa de aparecer nos operadores acima.

Seção 2: Estimativas assintóticas de soluções de $(\tilde{\ell}_{ok} - \lambda)u = 0$.

2. 1 Resolventes de $\tilde{\ell}_{ok}$.

Para ver quando operador formalmente definido ℓ_{ok} define um operador auto-adjunto, é necessário estudar as soluções de $(\ell_{ok}-\lambda)u=0$ para algum número não real λ.

Se $y_1(r)$ e $y_2(r)$ são duas soluções linearmente independentes da equação

$$-(p(r)u'(r))'+(\gamma(r) - \lambda)u(r) = 0, \qquad 0 < r$$

tal que

$$p(r)(y_1(r)y_2'(r) - y_1'(r)y_2(r)) = 1,$$

então pondo:

$$G(r,\xi)= \begin{cases} y_1(r)y_2(\xi), & 0 < \xi \leq r \\ y_1(\xi)y_2(r), & r \leq \xi < \infty \end{cases}$$

Vê-se que o resolvente $(\ell_{ok} - \lambda)^{-1}$ é dado como um operador integral, $(\ell_{ok} - \lambda)^{-1}f(r) = \int_0^\infty G(r,\xi)f(\xi)d\xi, \quad f\in L^2(0,\infty)$.
Como ℓ_{ok} é formalmente auto-adjunto $(\ell_{ok}- \lambda)^{-1}$ é definido para todo $f \in L^2(0,\infty)$.

2.2 Estimativas assintóticas de soluções de $(\ell_{ok}-\lambda)u = 0$ em 0.

Doravante supomos as seguintes condições sobre a função $p(r)$

(2.1a) $p(r)$ é real e é diferenciável continuamente para todo $r \in [0,\infty)$.

(2.1b) $p(r) > c$ para todo $r \in [0,\infty)$ e para algum $c > 0$.

(2.1c) $p(r)$ é analíticamente em 0.

Considere-se a expressão diferencial

(2.2) $(au)(r) = - (p(r)u'(r))' + q(r)u(r), \; 0<r < \infty$

com as seguintes condições sobre $q(r)$:

(2.3) $q\in L^2_{\ell oc}(0,\infty)$ e

(2.4) $r^2 \; q(r)$ é analiticamente em 0.

A equação diferencial

(2.5) $(au)(r) = \lambda u(r), \; 0 < r < \infty, \lambda$ não-real, pode ser reescrita na forma matricial:

(2.6) $\dfrac{dY}{dr} = A(r)Y,$ onde

(2.7) $$Y = \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad A(r) = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{1}{p(r)} \\ q(r) - \lambda & 0 \end{vmatrix}$$

Por causa de (2.1a), (2.1b) e (2.3), existe uma única solução $Y = Y(r)$ da equação (2.6) tal que $Y(r_0) = Y_0$ para qualquer $r_0 \in (0,\infty)$ e vetor arbitrário $Y_0 = \begin{vmatrix} u_0 \\ \\ v_0 \end{vmatrix}$ (Veja Naimark [14], teorema 1, página 51). Portanto escolhendo

(2.8) $u_1(r_0) = 1,\ u_1'(r_0) = 0,\ u_2(r_0) = 0$ e $u_2'(r_0) = \dfrac{1}{p(r_0)}$ para um

ponto arbitrário $r_0 \in (0,\infty)$ tal que u_1 e u_2 satisfazem condições (2.3), pode-se obter duas soluções linearmente independentes u_1 e u_2 da equação (2.5).

O ponto $r = 0$ é um ponto singular regular para a equação diferencial (2.5). Pondo

$$\frac{rp'(r)}{p(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \quad \text{e} \quad \frac{r^2 q(r) - \lambda}{p(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n$$

acha-se a equação indicial de (2.5) como $t(t-1) - b_0 = 0$. Se t_1 e t_2 são raizes desta equação e se $b_0 > 0$, então as raízes t_1 e t_2 são reais e diferentes e tem-se que

$$u_1(r) \sim r^{t_1} \text{ e } u_2(r) \sim r^{t_2} \text{ em } 0.$$

Assim tem-se o seguinte

Lema 2.1. Seja $p(r) > c > 0$ para $0 \leq r < \infty$ e seja $p(r)$ analítica em 0, então a equação diferencial

(2.9) $(\ell_{ok} - \lambda)u(r) \equiv -(p(r)u'(r))' + (\gamma(r) - \lambda)\, u(r) = 0$

tem soluções linearmente independente $u_1(r)$ e $u_2(r)$ tal que

(2.10) $u_1(r) \sim r^{-\nu+1/2}$ e $u_2(r) \sim r^{\nu+1/2}$ em 0,

onde $\nu = k + \dfrac{m-2}{2}$

Prova: Pondo $a = \ell_{ok}$ na discussão acima vê-se que

$b_0 > 0$, $t_1 = -\nu+1/2$ e $t_2 = \nu+1/2$

2.3. Estimativas assintóticas de soluções de $(\ell_{ok} - \lambda)u = 0$ em ∞.

Def. 2.2. Uma função f definida em $(0,\infty)$ é dita possuir a propriedade N, se existe um número $r_0 \in (0,\infty)$ tal que $f(r) = f_1(r) + f_2(r)$ para

$r \geq r_0$ e $|f_1'|$ e $|f_2|$ são integráveis em $(r_0 \infty)$.

Def. 2.3. Uma função definida em $(0,\infty)$ é dita possuir a propriedade W se existe um número $r_0 \in (0,\infty)$ tal que $f(r) = f_1(r) + f_2(r)$ para $r \geq r_0$ e $f_1(r)$ é de variação limitada em (r_0,∞) e $\lim_{r\to\infty} f_1(r) = 0$ e $|f_2(r)|$ é integrável em (r_0,∞).

Lema 2.5. Se a função $p(r)$ satisfaz as condições

(2.11) a) $\lim_{r\to\infty} \dfrac{1}{p(r)} = a > 0$ e

b) $\gamma(r)$ possue propriedade N, então a equação diferencial (2.9) com λ não-real tem duas soluções linearmente independentes, $u_1(r)$ e $u_2(r)$ com as seguintes estimativas assintóticas em ∞.

$$u_1(r) \sim \exp\left\{ \int_{r_0}^{r} \alpha_1(\xi)\, d\xi \right\}$$

$$u_2(r) \sim \exp\left\{ - \int_{r_0}^{r} \alpha_1(\xi) d\xi \right\}, \text{ onde}$$

$$\alpha_1(r) = \sqrt{\frac{q_0(r) - \lambda}{p(r)}} \quad \text{e}$$

$$C_k \frac{p(r)}{r^2} + \frac{m-1}{2} \frac{p'(r)}{r} = q_0(r) + q_1(r)$$

como na definição 2.2.

Prova : A equação diferencial (2.9) pode ser reescrita na forma matricial

$$\frac{dY}{dr} = A(r)Y, \quad \text{onde}$$

$$A(r) = A_0(r) + A_1(r)$$

$$A_0(r) = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{1}{p(r)} \\ q_0(r)-\lambda & 0 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad A_1(r) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ q_1(r) & 0 \\ & \end{vmatrix}$$

Nesta decomposição da matriz $A(r)$, os elementos de $A_0(r)$ e de $A_1(r)$

satisfazem a hipótese do teorema e corolario (Página 150, Naimark [15]

$\alpha_1(r)$ e $-\alpha_1(r)$ são autovalores da matriz $A_0(r)$ e

$$\lim_{r\to\infty} \text{Re}\, \{\alpha_1(r) - (-\alpha_1(r))\}=2 \lim_{r\to\infty} \text{Re} \sqrt{\frac{q_0(r)-\lambda}{p(r)}} \neq 0$$

Logo, do teorema do Naimark, conclui-se que existem duas soluções linearmente independentes

$$Y_1 = \begin{vmatrix} Y_{11} \\ \\ Y_{21} \end{vmatrix} \quad e \quad Y_2 = \begin{vmatrix} Y_{12} \\ \\ Y_{22} \end{vmatrix}$$

da forma $Y_{kj} = \exp \{ \int_{r_0}^{r} \alpha_k(\xi)d\xi\} \cdot \sum_{s=1}^{2} b_{js}(r)\eta_{sk}(r)$, j, k, = 1, 2

onde $b_{js}(r)$ são elementos da matriz modal $B(r)$ de $A_0(r)$ e $\eta_{sk}(r)$ são funções satisfazendo a condição

$$\lim_{r\to\infty} \eta_{sk}(r) = \begin{cases} 1 & \text{para } s = k \\ 0 & \text{para } s \neq k \end{cases}$$

Da assintoticidade de $\eta_{sk}(r)$, e das formas explícitas de $\alpha(r)$ e $B(r)$ como

$$\alpha(r) = \begin{vmatrix} \alpha_1(r) & 0 \\ & \\ 0 & -\alpha(r) \end{vmatrix} \quad e \quad \beta(r) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ & \\ \alpha_1(r)p(r) & -\alpha_1(r)p(r) \end{vmatrix}$$

tal que $A_0(r)B(r) = B(r)\alpha(r)$, tem-se as seguintes estimativas assintóticas para $u_1(r) = y_{11}(r)$ e $u_2(r) = y_{22}(r)$ em ∞,

$$(2.12)\begin{cases} u_1(r) \sim \exp \{ \int_{r_0}^{r} \alpha_1 (\xi)d\xi\} \\ \\ u_2(r) \sim \exp \{- \int_{r_0}^{r} \alpha_1(\xi)d\xi\} \end{cases}$$

Observação 2.6. A matriz B não é única. Como uma permutação de colunas de B implicam uma permutação correspondente dos $\alpha(r)$'s e portanto a das $u(r)$'s unicidade de B é obtida exigindo que os vetores colunas sejam unitários. Isto resulta em dividir a matriz B por $1 + \alpha^2 p^2$ que é limitada em vista de (2.11a) e da definição 2.2. Logo prefere-se temar B na forma acima

Estimativas semelhantes podem ser obtidas sob outras condições como dadas no seguintes

Lema 2.7. Se a função p(r) satisfaz as condições

(2.13) a) $\int_0^\infty \frac{dr}{\sqrt{p(\xi)}} = \infty$

b). $\delta(r) = C_k \frac{p(r)}{r^2} + \frac{m-1}{2} \frac{p'(r)}{4} + p''(r) - \frac{1}{16} \frac{(p'(r))^2}{p(r)}$

possui a propriedade N.

Então a equação diferencial (2.9) com λ não-real tem duas soluções linearmente independentes $u_1(r)$ e $u_2(r)$ com as seguintes estimativas assintóticas em ∞

(2.14)
$$u_1(r) \sim \frac{1}{p^{1/4}(r)} \exp \{ \int_{r_0}^r \alpha(\xi)d\xi \}$$
$$u_2(r) \sim \frac{1}{p^{1/4}(r)} \exp \{- \int_{r_0}^r \alpha(\xi)d\xi \} \text{ , onde}$$

$$\alpha(r) = \sqrt{\frac{q_0(r) - \lambda}{p(r)}} \quad \text{e}$$
$$\delta(r) = q_0(r) + q_1(r)$$

como na definição 2.2.

Prova: Pela transformada de Sturm-Liouville. (Ver Birkoff - Rota [1]) a equação (2.9) é transformada em

(2.15) $- \frac{d^2w(t)}{dt^2} + (q^*(t)-\lambda)w(t)=0, \quad 0 < t < \infty$

$$q^*(t) = \delta(r) \text{ com } t = \phi(r) = \int_{r_0}^r \frac{d\xi}{\sqrt{p(\xi)}}$$

Como $p(r) > c$ para $r \in [0,\infty)$, é óbvio que se f(r) possui a propriedade N, então $f(\phi^{-1}(t))$ também a possui. Isto, em vista de (2.13b), significa que $q^*(t)$ possui a propriedade N. Pondo $q^*(t)=q_0^*(t)+q_1^*(t)$ como definição 2.2, vê-se que

$$q_0^*(t) = q_0(\phi^{-1}(t)) \text{ e } q_1^*(t) = q_1(\phi^{-1}(t)).$$

(2.15) satisfaz a hipótese do Lema 2.5 com $p(t)\equiv 1$, logo ela tem duas soluções linearmente indepentes $u_1^*(t)$ e $u_2^*(t)$ com as seguin -

tes estimativas assintóticas em ∞,

$$u_1^*(t) \sim \exp\{\int_0^t \sqrt{q_0^*(t)-\lambda}\, dt\} \quad \text{e}$$

$$u_2^*(t) \sim \exp\{-\int_{t_0}^t \sqrt{q_0^*(t)-\lambda}\, dt\}.$$

voltando à variável r através da inversa de transformada de Sturm-Liouville obtem-se (2.14).

O conteúdo das seções (2.2) e (2.3) é resumido no seguinte.

Teorema 2.8. Suponha que a função $p(r)$ satisfaz (2.1) e ou (2.11) ou (2.13) então a equação diferencial

$$-(p()u'(r))' + (\gamma(r) - \lambda)u(r) = 0, \quad 0 < r < \infty$$

tem duas soluções linearmente independentes $y_1(r)$ e $y_2(r)$ com as seguintes propriedades:

(2.16) $y_j(r) \sim r^{a_j\nu+1/2}$ em $r = 0$ $j = 1,2$, e

(2.17) $y_j(r) \sim \beta(r) \exp\{a_j \int_{r_0}^r \frac{R(\xi)\cos\theta(\xi)}{\sqrt{p(\xi)}} d\xi\}$ em ∞, $j = 1,2$

onde $\beta(r) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \text{ satisfaz (2.11)} \\ \dfrac{1}{p(r)^{1/4}} & \text{se } p \text{ satisfaz (2.13)} \end{cases}$

$R(\xi)\cos\theta(\xi) = \mathrm{Re}\sqrt{q_0(\xi) - \lambda}$, $a_1 = -1$ e $a_2 = +1$

Prova: As estimativas (2.16) são obtidas no lema 2.1.

escrevendo

$\sqrt{q_0(\xi) - \lambda} = R(\xi)(\cos\theta(\xi) + i \operatorname{sen}\theta(\xi)$, $R(\xi) > 0$. Tem-se que

$-2 = R^2(\xi) \operatorname{sen} 2\theta(\xi)$, $-\Pi < 2\theta(\xi) < 0$ e

$R(\xi)\cos\theta(\xi) > 0$. As partes imaginárias de $\alpha(\xi)$ e $-\alpha(\xi)$ em (2.12) e (2.14) podem ser omitidas no cálculo de estimativas de soluções.

Se $y_1(r)$ e $y_2(r)$ foram escolhidas tal que

$$p(r)(y_1(r)y_2'(r) - y_1'(r)y_2(r)) = 1,$$

então da positividade de ν, $y_1(r)$ se comporta com $r^{-\nu+1/2}$ em $r = 0$ e da positividade de

$\frac{R(\xi)\cos\theta(\xi)}{\sqrt{p(\xi)}}$, ela se comporta como

$\beta(r) \exp\{\int_{r_0}^r \frac{R(\xi)\cos}{\sqrt{p(\xi}}$

e não como

$$\beta(r)\exp\{\int_{r_0}^{r}\frac{R(\xi)\cos\theta(\xi)}{\sqrt{p(\xi)}}d\xi\}.$$

Analogamente o comportamento $y_2(r)$ como enunciado no teorema é justificado.

Corolário 2.9. Se $p(r)$ satisfaz a hipótese do teorema 2.8, então o operador diferencial ℓ_{ok} tem os seguintes índices de deficiência:

(1.1) em $r = 0$ para $\nu > \frac{1}{2}$

(2.2) em $r = 0$ para $\nu = \frac{1}{2}$ e

(1.1) em $r = \infty$ para todo ν.

Prova: Os índices de deficiencias em $r = 0$ são obtidos diretamente de (2.16).

De (2.17) tem-se

$$\int_1^\infty |y_1(r)|^2 dr \leq c\int_1^\infty \beta^2(r)\exp\{-2\int_0^r \frac{R(\xi)\cos\theta(\xi)}{\sqrt{p(\xi)}}d\xi\}dr \tag{2.18}$$

$$\leq \int_1^\infty \frac{\beta^2(r)\sqrt{p(r)}}{R(r)\cos\theta(r)}\cdot\exp\{-2\int_{r_0}^r \frac{R(\xi)\cos\theta(\xi)}{\sqrt{p(\xi)}}d\xi\}\frac{R(r)\cos\theta(r)}{\sqrt{p(r)}}dr$$

$$\leq c\int_{s_0}^\infty e^{-2s}ds\ ,\quad \text{onde}$$

$$s(r) = \int_{r_0}^r \frac{R(\xi)\cos\theta(\xi)d}{\sqrt{p(\xi)}}\ . \tag{2.19}$$

Analogamente prova-se de (2.17) que

$\int_1^\infty |y_2(r)|^2 dr \geq c\int_{s_0}^\infty e^{2s}ds$. Assim $y_1 \in L^2(1,\infty)$ $y_2 \notin L^2(1,\infty)$.

Logo os índices de deficiencias de ℓ_{ok} são (1,1) em ∞ para todo ν.

Seção 3: Principais resultados

Sejam L_j' e L_{jk}' definidos por $L_j'u(x) = \ell_j u(x)$ e $L_{jk}'u(x) = \ell_{jk}u(x)$ com $D(L_j') = C_0^2(R^m)$ e $D(L_{jk}') = C_0^2(0,\infty)$, $j = 0, 1 \ldots$

Então $\mathfrak{L}_0'$ é essencialmente auto-adjunto se $p(|x|) > c > 0$ e $p(|x|)$ é suficientemente suave, a saber, $p \in c^3(R^m)$ (veja Hellwing [3]).

Quando $m > 3$ no corolário 2.9 foram dadas condições sob quais $\mathfrak{L}_{ok}'$, $k = 0,1,2,\ldots$ conduzem a operadores essencialmentes auto-adjuntos, que são denotados por $\mathfrak{L}_{ok}$ e isto implica que $\mathfrak{L}_0'$ é essencialmente auto - adjunto em $C_0(R^m)m$ por Corolário 3.3. $\mathfrak{L}_0$ representa a única extensão auto-adjunta. Mas quando $m = 3$ e $k = 0$, ℓ_{00} não define um único operador auto-adjunto. Seja $\mathfrak{L}_{00}$ um operador auto-adjunto definido por ℓ_{00}. Neste caso uma condição de fronteira é imposta sobre funções do domínio e este conduz ao operador auto-adjunto $\mathfrak{L}_0$ em $L^2(R^m)$. Porém, se $\mathfrak{L}_0$ é auto-adjunto, então a única condição de fronteira é $u(0)=0$ como será visto na proposição 3.1.

Proposição 3.1. Seja $m = 3$. Então tem-se que

1) se $v \in \mathcal{D}(\mathfrak{L}_0)$ então v é limitado.

2) se $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{L}_{00})$ então $u(0) = 0$.

Prova: Sejam $v \in \mathcal{D}(\mathfrak{L}_0)$,

$\tilde{v}(k) = (2\pi)^{-3/2} \int_{R^3} e^{-ik.x} v(x)dx$, a transformada de Fourier de v,

Então $\left(\int_{R^3} |\tilde{v}(k)|\, dk \right)^2 \leq$

$$\int_{R^3} \frac{dk}{\left| |k|^2 p(x) + i \sum_{j=1}^{m} k_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \alpha^2 \right|^2}$$

$$\int_{R^3} \left| |k|^2 p(x) + i \sum_{j=1}^{m} k_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \alpha^2 \right|^2 |\tilde{v}(k)|^2 dk$$

para $\alpha > 0$ arbitrário, em que o primeiro fator à direita é limitado por

$$\int_{R^3} \frac{dk}{\left| |k|^2 p(x) + \alpha^2 \right|^2} \leq \frac{\pi^2}{\alpha\, p(x)^{3/2}}$$

e o segundo fator é igual a $||(- \Delta + \alpha^2)u||^2$. Logo

$/(x)| \leq (2\pi)^{-3/2} \int_{R^3} |\bar{v}(k)| dk \leq \frac{\pi}{\alpha^{1/2} p(x)^{3/4}} ||(-\bar{\Delta}+\alpha^2)v||^2 < \infty$

Seja $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{00})$. Como $\mathcal{L}_{00}$ é equivalente unitariamente a uma restrição de $\mathcal{L}_0$ sob T vê-se que $R^{-1}u(r) = \frac{u(r)}{r} \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_0)$. Logo $\frac{u(r)}{r}$ é limitado. Isto implica $u(0) = 0$.

Os seguintes lemas são úteis na demonstração do teorema 3.5.

Lema 3.2. Seja H um operador num espaço de Hilbert

$\mathcal{H} = \sum_{j=1} \oplus \mathcal{H}_j$.

Supomos que $\mathcal{H}_j, j = 1,2,...$ reduzem H. Seja H_j a restrição de H a $\mathcal{H}_j$. Então o operador H é auto-adjunto se e somente se os operadores H_j, $j = 1,2,...$, são auto-adjuntos. Além disso quando H é auto-adjunto, tem-se

$$\mathcal{H}_{ac}(H) = \sum_{j=1}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_{ac}(H_j).$$

A primeira afirmação do lema segue dos seguintes fatos: H é simétrico em $\mathcal{H}$ se e somente se H_j o é em $\mathcal{H}_j$ para $j = 1,2,...$ e $R(H \pm iI) = \sum_{j=1}^{\infty} \oplus R(H_j \pm iI_j)$, onde $R(A)$ é a imagem do operador A e I e I_j são identidades em $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}_j$ respectivamente.

$R(H \pm iI) = \mathcal{H}$ se e somente se $R(H \pm iI_j) = \mathcal{H}_j$ para $j = 1,2,...$

Para demonstrar a segunda parte, seja $E(\lambda)$ e $E_j(\lambda)$, $j=1,2,...$ as famílias espectrais de H e H_j, $j = 1,2,...$, respectivamente. Então $E_j(\lambda)$ e $E(\lambda)P_j$, onde P_j é a projeção sobre $\mathcal{H}_j$.

Seja $f = \sum_{j=1}^{\infty} \oplus f_j$, $f_j \in \mathcal{H}_{ac}(H_j)$ e seja $h_n = \sum_{j=1}^{n} \oplus f_j$

Então $(E_j(\lambda)f_j, f_j)$, $j = 1,2,...,n$, são absolutamente contínuas para $\lambda \in (-\infty,\infty)$. Logo $(E(\lambda)h_n, h_n)$ é absolutamente contínua em $(-\infty,\infty)$. Isto é, $h_n \in \mathcal{H}_{ac}(H)$. Desde que $\mathcal{H}_{ac}(H)$ é fechado, tem-se

$\Sigma \oplus \mathcal{H}_{ac}(H_j) \subset \mathcal{H}_{ac}(H)$.

Reciprocamente, se $f \in \mathcal{H}_{ac}(H)$ e $f = \sum_{j=1}^{\infty} \oplus f_j$, $\mathcal{H}_j$, então $(E(\lambda)f, f) = \sum_{j=1}^{\infty} (E_j(\lambda)f_j, f_j)$ é absolutamente contínua em $(-\infty,\infty)$. Como $(E_j(\lambda)f_j, f_j)$, $j = 1,2,\ldots$ é não-negativa, $(E_j(\lambda)f_j, f_j)$, $j = 1,2,\ldots$ são absolutamente contínuas em $(-\infty,\infty)$. Assim $f \in \sum_{j=1}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_{ac}(H_j)$.

Corolário 3.3. A primeira parte do lema acima vale se o "Auto-Adjunto" é substituido por "essencialmente auto-adjunto".

Prova: A prova segue diretamente do fato que $R(H+iI)$ é denso em $\mathcal{H}$ se e somente se $R(H_j+iI_j)$ é denso em $\mathcal{H}_j$ para todo $j = 1,2,\ldots$.

Lema 3.4. Sejam H_0 e H_1 operadores auto-adjuntos num espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_j$ e suponha $\mathcal{H}_j$, $j = 1,2,\ldots$ reduzem H_0 e H_1. Sejam H_{0j} e H_{1j} as restrições de H_0 e H_1 a $\mathcal{H}_j$ respectivamente. Então os operadores de onda generalizados $W_{\pm}(H_{1j},H_{0j})$ existem para $j = 1,2,\ldots$ Além disso, vale $W_{\pm}(H_1,H_0) = \sum_{j=1}^{\infty} \oplus W_{\pm}(H_{1j},H_{0j})$.

Veja Kuroda [12] para a demonstração e use lema 3.2.

Considere as seguintes condições sôbre uma função real $q(r)$ cujo quadrado é localmente integrável em $(0,\infty)$:

(3.1) $\int_0^1 |q(r)|^2 r^2 \Psi(r)\, dr < \infty$ onde $\Psi(r)$ igual a 1, $r|\log r|$ ou r em acordo com m é 3, 4 ou mais.

(3.2) $\sup_{x_0 < \xi < \infty} \int_{\xi}^{\xi+1} |q(r)|^2 dr < \infty$ para algum x_0 $(0,1)$

(3.3) $\int_0^1 |q(r)|^2 \Psi(r)\, dr < \infty$

(3.4) $\int_1^{\infty} |q(r)| dr < \infty$.

Considere as seguintes condições sobre a função $p(r)$:

$$(3.5)\quad \sup_{r>1} \int_r^{r+1} \left\{ \left| \frac{p'(t)}{p(t)} \right|^2 + \left| \frac{d}{dt} \frac{p'(t)}{p(t)} \right|^2 \right\} dt < \infty$$

Tem-se o seguinte

Teorema 3.5. Suponha que $p(r)$ satisfaz condições (2.1), (3.5) e uma das (2.11) e (2.13).

Com as condições (3.1), (3.2) e (3.4) sôbre q o operador de multiplicação Q é L_{ok} - ε - limitado, isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $k(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $u \in \mathcal{D}(L_{0k})$ tem-se

$$(3.6)\quad ||Qu|| \leq \varepsilon\, ||L'_{ok}u|| + K(\varepsilon)\, ||u||.$$

O operador $L'_{1k} = L'_{ok} + Q$ possui uma única extensão auto-adjunto L_{1k} para $k = 0,1,2,\ldots$ (induzida pela condição de fronteira $u(0)=0$ se $m = 3$ e $k=0$)e

a) com as condições (3.3) sôbre q o operador

$|Q|^{1/2}(L_{ok} - \lambda)^{-1}$ é de tipo Hilbert-Schmidt.

b) (3.1), (3.2) e (3.4) sôbre q, os operadores de onda

$W_{\pm}(L_{1k}, L_{ok})$ e $W_{\pm}(L_{ok}, L_{1k})$ existem e são completos.

Teorema 3.6. Seja p como na hipótese do teorema 3.5. Com as condições (3.1) e (3.2) sôbre $q(x) = q(|x|)$, os operadores L'_0 e L'_1 possuem únicas extensões auto-adjuntas. Sejam estas denotadas por L_0 e L_1 respectivamente.

Com as condições (4.1) , (4.2) e (4.4) sôbre q, os operadores de onda $W_{\pm}(L_1, L_0)$ e $W_{\pm}(L_0, L_1)$ existem e são completos.

Sôbre as partes absolutamente contínuas de L_{ok} e L_0 tem-se o seguinte

Teorema 3.7. Além da hipótese do teorema 3.5, se $\delta(r)$ possui a propriedade W,

então L_{ok} e L_0 são absolutamente contínuas e os operadores de dispersão

$$W_+^*(L_{1k}, L_{0k})\, W_-(L_{1k}, L_{0k}) \text{ e } W_+^*(L_1, L_0)\, W_-(L_1, L_0)$$

são unitários e as partes absolutamente contínuas de L_{1k} e L_1 são unitariamente equivalentes a L_{0k} e L_0 respectivamente.

Demonstração dos Teoremas 3.5 e 3.7.

Prova do Teorema 3.5. Segue da discussão da seção 2 que

$|Q|^{1/2}(\mathcal{L}_{0k} - \lambda)^{-1}$ é um operador em $L^2(0,\infty)$ com núcleo $K(r,\xi)$ dado por

$$(3.7)\quad k(r,\xi) = |q(r)|^{1/2}\, G(r,\xi)$$

onde $G(r,\xi)$ é definido na seção 2. Para mostrar que ele é do tipo Hilbert-Schmidt basta verificar que

$$(3.8)\quad \int_0^\infty \int_0^\infty |K(r,\xi)|^2\, dr\, d\xi < \infty .$$

De (2.10) e (2.17) tem-se

$$(3.9)\quad |y_j(r)|^2 \leqslant C\, r^{2a_j\nu+1} \qquad \text{para } 0 < r \leqslant 1$$

$$(3.10)\quad |y_j(r)|^2 \leqslant C\, \beta^2(r) \exp\{2a_j s(r)\} \text{ para } 1 < r < \infty .$$

onde $s(r)$ é como em (2.19) e $a_1 = -1$ e $a_2 = +1$.

Seja $0 < r \leqslant 1$. De (3.7), (3.9) obtem-se

$$(3.11)\quad \int_0^r |K(r,\xi)|^2\, d\xi \leqslant C\, |q(r)|\, r^3$$

De (3.9) e (3.10) segue que

$$(3.12)\quad \int_r^\infty |y_1(\xi)|^2\, d\xi \leqslant \begin{cases} C & \nu = 1/2 \\ C\, r^{-2\nu+2} & \nu > 1 \\ C\,|\log r| & \nu = 1 \end{cases}$$

De (3.7), (3.9) e (3.12), conclui-se que

$$(3.13)\quad \int_r^\infty |K(r,\xi)|^2\, d\xi \leqslant C\, |q(r)|\, r^2\Psi(r).$$

Seja $1 \leqslant r < \infty$, então de (3.a) e (3.11) obtem-se, como na derivação de (2.18),

$$(3.14)\quad \int_0^r |y_2(\xi)|^2 d\xi \leqslant C \exp\{2s(r)\}$$

$$(3.15)\quad \int_r^\infty |y_1(\xi)|^2 d\xi \leqslant C \exp\{-2s(r)\} \qquad \text{e}$$

$$(3.16)\quad \int_0^r |K(r,\xi)|^2\, d\xi \leqslant C|q(r)|.$$

Usando (3.7), (3.10) e (3.15), segue que

$$(3.17)\quad \int_r^\infty |K(r,\xi)|^2\, d\xi \leqslant C|q(r)|.$$

Finalmente, (3.11), (3.13) e (3.17) conduzem a

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |K(r,\xi)|^2\, d\xi\, dr = \int_0^1 \int_0^r |K(r,\xi)|^2\, d\xi\, dr$$

$$+ \int_1^\infty \int_0^r |K(r,\xi)|^2\, d\xi\, dr + \int_0^1 \int_r^\infty |K(r,\xi)|^2\, d\xi\, dr$$

$$+ \int_1^\infty \int_r^\infty |K(r,\xi)|^2 \, d\xi \, dr$$

$$\leq C \{ \int_0^1 |q(r)| r^3 dr + \int_1^\infty |q(r) dr + \int_0^1 |q(r)| r^2 (r) dr$$

$$+ \int_1^\infty |q(r)| dr \} < \infty \quad \text{por (3.3) e (3.4)}$$

Logo (3.8) é estabelecido

Suponha agora que q satisfaz (3.1) e (3.2). Escrevendo q como $q = q_1 + q_2$, $q_1 = q\chi_{(0,1]}$ e $q_2 = q\chi_{(1,\infty)}$

onde χ_I é a função caracterísitca de I. A função q_1^2 satisfaz as mesmas condições de q do parágrafo anterior e assim o operador $Q_1(L_{0k} - \lambda)^{-1}$ é do tipo Hilbert- Schmidt. Isto implica L_{0k} -ε-compacticidade de Q_1, que por sua vez implica a L_{0k} -ε-limitação de Q_1. (Veja apendice I de J.M. Combes [2]).

Sejam $u \in C^2(0,\infty)$ e $\eta \in C^2(0,s)$, $s < 1$ tal que $\eta(0) = \eta(s) = 0 = \eta'(s)$ e $\eta'(0) = 1$.

Então pela integração por partes tem-se

$$u(r) = \int_d^s - \frac{\eta(t)}{p(r+t)} \mathcal{L}_{0k} u(r+t) \, dt + \int_0^s H(r+t) \, u(r+t) \, dt, \text{ onde}$$

$$H(r,t) = \eta(t) \{ \frac{C_k}{(r+t)^2} + \frac{m-1}{2(r+1)} \frac{p'(r+t)}{p(r+t)} + \frac{d}{dt} \frac{p'(r+t)}{p(r+t)}$$

$$+ \eta'(t) \cdot \frac{p'(r+t)}{p(r+t)} - \eta''(t)$$

Para $r \geq 1$ e $t \in [0,s]$ tem-se

$$|H(r,t)| \leq C\{1 + \left| \frac{p'(r+t)}{p(r+t)} \right| + \left| \frac{d}{dt} \frac{p'(r+t)}{p'(r+t)} \right|$$

$$\int_0^s |H(r,t)|^2 dt \leq C \int_0^s \{1 + \left| \frac{p'(r+t)}{p(r+t)} \right| + \left| \frac{d}{dt} \frac{p'(r+t)}{p(r+t)} \right|^2 \} dt$$

$$\leq \int_r^{r+1} \{ 1 + \left| \frac{p'(\xi)}{p(\xi)} \right|^2 + \left| \frac{d}{d\xi} \frac{p'(\xi)}{p(\xi)} \right|^2 \} d\xi$$

$$< \infty \quad \text{por (3.5) e}$$

$$|u(r)|^2 \leqslant \int_0^s \frac{|h(t)|^2}{p^2(r+t)}\, dt.\ \int_0^s |\ell_{0k}\, u(r+t)|^2 dt +$$

$$+ \int_0^s |H(r,t)|^2\, dt.\ \int_0^s |u(r+t)|^2 dt$$

$$\leqslant k_1 . s \int_0^s |\ell_{0k}\, u(r+t)|^2\, dt + k_2 \int_0^s |u(r+t)|^2\, dt.$$

$$= k_1\, s \int_r^{r+s} |\ell_{0k} u(\xi)|^2\, d\xi + k_2 \int_r^{r+s} |u(\xi)|^2\, dt.$$

Multiplicando a última desigualdade por $|q_2(r)|^2$ e integrando em relação a r, tem-se

$$\int_0^\infty |q_2(r)|^2\, |u(r)|^2\, dr \leqslant k_1\, s \int_0^\infty |q_2(r)|^2\, dr \int_r^{r+s} |\ell_{0k} u(\xi)|^2\, d\xi$$

$$+ k_2 \int_0^\infty |q_2(r)|^2\, dr \int_r^{r+s} |u(\xi)|^2\, d\xi .$$

Se $s < 1$, então $X \subset Y$ e como função de duas variáveis (ξ, r) q_2 é zero, em $Y - X$. onde

$X = \{(\xi, r) : \xi - s \leqslant r \leqslant \xi \quad e \quad 1 \leqslant \xi < \infty\}$ e

$Y = \{(\xi, r) : r \leqslant \xi \leqslant r+s \quad e \quad 0 \leqslant r < \infty\}$

Logo pela mudança de variáveis, da integração, que é justificada pelo teorema de Fubini tem-se

$$\int_0^\infty |q_2(r)|^2\, |u(r)|^2\, dr \leqslant k_1\, s \int_1^\infty |\ell_{0k} u(\xi)|^2\, d\xi \int_{\xi-s}^{\xi} |q(r)|^2\, dr$$

$$+ k_2 \int_1^\infty |u(\xi)|^2\, d\xi \int_{\xi-s}^{\xi} |q(r)|^2\, dr.$$

De (3.5) é fácil ver que dado $\varepsilon > 0$, escolhendo s o menor de ε/k_1 e $1 - x_0$, acha-se um $k(\varepsilon) > 0$ tal que

$$||Q_2 u|| \leqslant \varepsilon\, ||L'_{0k} u|| + K(\varepsilon)\, ||u|| \quad \text{para } u \in C_0^2\,(0,\infty) = \mathcal{D}\,(L_{0k})$$

Logo $Q = Q_1 + Q_2$ e L'_{0k} - ε - limitado em (L'_{0k}). Assim L'_{1k} é essencialmente auto-adjunto (L'_{0k}), $k = 0,1,2,\ldots$ exceto quando $k=0$ e $m=3$. Seja L_{1k} a extensão auto-adjunto de L'_{1k}. No caso excepcional, uma única extensão auto-adjunta L_{00} é induzida por L_0 e a L_{00} - ε - limitação de Q implica a existência de uma única extensão auto-adjunta de L'_{10}.

Suponha finalmente, que q satisfaz (3.1), (3.2) e (3.4). As condições (3.3) seguem de (3.1). Portanto, o operador de multiplicacão Q é auto-adjunto e $|Q|^{1/2}(L_{0k} - \lambda)^{-1}$ é do tipo Hilbert-Schnidt. De um teorema de Kuroda, S. T. [10] e [12], segue que os operadores de onda $W_{\pm}(L_{1k}, L_{0k})$ e $W_{\pm}(L_{0k}, L_{1k})$ existem e são completos.

Prova do teorema 3.6. No início desta seção foi visto que $\tilde{L}_0$ é essencialmente auto-adjunto quando p satisfaz (2.3) e (2.11) ou (2.3) e (2.13). Seja L_0 a única extensão auto-adjunta. No teorema 3.5, foi visto que L_{1k}, $k = 0,1,2,\cdots$, são auto-adjuntos seja L_1 o operador maximal definido por ℓ_1, isto é,

$L_1 u = \ell_1 u$ para $u \in \mathcal{D}(L_1) = \{u : u, \ell_1 u \in L^2(R^m)\}$.

A restrição de L_1 a H_{kj} é unitariamente equivalente ao operador L_{1k} através operador unitário T (Seção 2), logo ele é auto-adjunto para $k = 0,1,2,\ldots$. Então pelo lema 3.2, o operador L_1 é, de fato, a única extensão auto-adjunta de L_1'. Isto segue da unicidade de L_{1k}, $k = 0,1,2,\ldots$

Lema 3.4 implica a existência dos operadores de onda generalizados $W_{+}(L_1, L_0)$ e $W_{+}(L_0, L_1)$. Usando lemas 3.4 e 3.2 obtem-se

$$W_{\pm}(L_1,L_0)\, H_{ac}(L_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus W_{\pm}(L_{1k},L_{0k}) \sum_{k=1}^{\infty} H_{ac}(L_{0k})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \oplus W_{\pm}(L_{1k},L_{0k}) \quad H_{ac}(L_{0k})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \oplus H_{ac}(L_{1k}) \text{ desde que } W_{\pm}(T_{1k},L_{0k}) \text{ são completos}$$

pelo teorema 3.5.

$$= H_{ac}(L_1),$$

que prova que $W_{+}(L_1, L_0)$ são completos.

Prova do teorema 2.7: Como $p(r)$ é analítica em $r = 0$.

$$\lim_{p \to 0} \{r^2 \delta(r)\}\, C_k p(0) > 0 \text{ para } k = 0.1$$

Logo para suficientemente pequeno r, tem-se

$$\delta(r) \geq -\frac{c'}{r^2} \quad \text{com} \quad c' < \frac{1}{4}$$

Em $t = 0$, tem-se $t \sim r$, onde $t = 0\,(r)$ como em (2.15); portanto, para suficientemente pequeno r, $q^*(t) \geq -\frac{c'}{t^2}$ para $c' < \frac{1}{4}$ onde $q^*(t) = \delta(\phi(t))$.

É fácil ver que se $\delta(r)$ possui a propriedade W, então $q^*(t)$ o faz. Logo por um resultado de Weidman [16] o espectro do operador auto-adjunto $-\frac{d^2t}{dt^2} + q^*(t)$ é absolutamente contínuos em $(0,\infty)$. Mas $\mathcal{L}_{0k}$ é unitariamente equivalente a este operador através da transformada de Sturm-Liouville e o espectro de $\mathcal{L}_{0k}$ é absolutamente contínuo em $(0,\infty)$.

O operador $\mathcal{L}_{0k}$ (e também $\mathcal{L}_0$) é positivo. De fato, para todo $u \in C_0^2\,(0,\infty)$ tem-se

$$(\mathcal{L}_{0k}\, u, u) = (\mathcal{L}_0\, T^{-1} u, T^{-1} u)$$

$$\geq C(L_0\, T^{-1} u, T^{-1} u) \geq 0,$$

Logo o espectro de $\mathcal{L}_{0k}$ (e também de $\mathcal{L}_0$) é um subconjunto de $[0,\infty)$. Mas 0 não é um autovalor de $\mathcal{L}_{0k}$ (ou de $\mathcal{L}_0$); porque, se existe um vetor $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{0k})$ tal que $\mathcal{L}_{0k}\, u = 0$, então $(L_0\, T^{-1} u, T^{-1} u) = 0$, $T^{-1} u = 0$ e $u = 0$, que prova que $\mathcal{L}_{0k}$ e $\mathcal{L}_0$ são operadores absolutamente contínuos.

As outras conclusões do teorema seguem dos teoremas 3.5 e 3.6 e de um resultaod de Kuroda, S.T. [11].

BIRKOFF, G. & ROTA, G.C. *Ordinary differential equations*, London, Blaisdell Pub., 1968.

COMBES, J.M. Relatively compact interactions in many particle systems. *Comm. Math. Phy.*, *12* : 289-295, 1969.

HELLWIG, G. *Diferrential operators of mathematical Physics*, Reading, Addison-Wesley Pub., 1967.

IKEBE, T. Eigenfunction expasions associated with the Schrödinger operators and their applications to scattering theory. *Arch. Rat. Mach. and Anal.*, 5: 1-34, 1960.

IKEBE, T. & TAYOSKI, T. Wave and scattering operatos for second order elliptic operators in R^3. *Publ. RIMS*, Kyoto Ser *A4*, 483-496, 1968.

JAUCH, J. M. & ZINNES, I. I. The asymtotic condition for simple scattering systems. *Il Nuovo Cim.*, 11 : 553-567,1969.

KATO, T. Perturbation of continuos spectra by trace class operators. *Pro. Jap. Acad.*, *33* :260-264, 1957.

______. Seaterring operators and perturbation of continous spectra. *Sugaku*, *9* : 75-84, 1975.

KATO, T. & KURODA, S. T. Abstract theory of scaterring. *The Rocky Mountain Jour. Math.*, *1* : 1970.

KURODA, S. T. On a paper of Green and Landford. *Journ. Math. Phys.*, New York, 3 : 933-935, 1962.

______. Perturbation of continous spectra by unbounded operators, I. *Journ Math Soc. Japan.*, Tokio, *11* : 247-262, 1959.

______. Pertubation of continous spectra by unbounded operators, II, *Jour. Math Soc. Japan*, Tokio, *12* : 243-257, 1960.

LUNDQVIST, E. On the existence of scaterring operator. *Ark. Mat.*, *7* : 145-157, 1969.

MAIMARK, M. A. *Linear differential operators, part II*. New York, Frederick Ungar Pub., 1968.

PUTNUM, C. R. *Commutation properties of Hilbert space operators and related topics*, New York, Springer-Verlag, 1967.

WEIDMANN, J. Zur spektraltheoric von Turn-Liouville- Operatoren. *Math. Zeit.*, Berlin, *98* (4) : 268-302, 1967

RESUMO

Este trabalho dar condições necessárias para a existência e completamento de operadores de onda e existência e unicidade de operador de dispersão associados ao par de operadores $-\tilde{\Delta}$ e $-\tilde{\Delta}+q$. onde $\tilde{\Delta}$ é uma generalização do Laplaciano.

SUMMARY

This paper gives necessary conditions for the existence and completeness of wave operators and the existence and unitarity of the scattering operator associated with the pair of operators $-\tilde{\Delta}$ and $-\tilde{\Delta}+q$ where $\tilde{\Delta}$ is a generalization of the Laplacian.