

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PERCOLAÇÃO COM SUPERFÍCIE LIVRE, PELO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS. UMA FORMULAÇÃO  
VIA INEQUAÇÕES VARIACIONAIS

Cid S. Gesteira

1. INTRODUÇÃO

Os primeiros estudos sobre percolação de água através de meios porosos foram desenvolvidos a partir de 1937 com os trabalhos de Muskat<sup>11</sup> e Casagrande<sup>6</sup> (1940). Posteriormente, soluções analíticas para o problema foram abordadas por Harr<sup>8</sup> (1962), Polubarinova-Kochina<sup>14</sup> (1952-1962), Aravin e Numerov<sup>1</sup> (1965) e Bear<sup>4</sup> (1968-1972).

Recentemente, com o desenvolvimento dos métodos numéricos e as facilidades computacionais cada vez maiores, Taylor e Brown<sup>15</sup> (1967) idealizaram uma abordagem baseada no método dos elementos finitos. Enquanto que Todsen<sup>16</sup> (1971) e Jeppson<sup>9</sup> (1968) desenvolviam esquemas numéricos de resolução com diferenças finitas.

O esquema proposto por Taylor e Brown foi aperfeiçoado por Neuman e Witherspoon<sup>12</sup> de modo a contornar a ambiguidade existente na determinação do ponto terminal da superfície livre (ponto C' na figura 1).

A evolução da teoria de inequações variacionais permitiu por sua vez, que o problema da percolação com fronteira livre fosse tratado com maior rigor matemático, oferecendo também Universitas, Salvador, (23, especial):37-63, 1978.

algumas facilidades computacionais.

É a partir desse último enfoque que se ocupará este trabalho.

O modelo tratado neste trabalho procura representar um problema típico de percolação, sem prender-se a detalhes práticos que possam prejudicar o objetivo principal, que é o de apresentar um método de resolução numérica.

## 2. APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Considere um maciço, por conveniência de forma retangular, constituído de um material poroso com características idiais, isto é, homogêneo, isotrópico, com porosidade uniforme, que separa dois reservatórios com níveis de água constantes mas diferentes, sobre um fundo impermeável (ver figura 1).

Na região onde ocorre a percolação, denotada  $\Omega_+$  na figura 1, admite-se que as equações que governam o fenômeno são:

(i) Conservação da massa

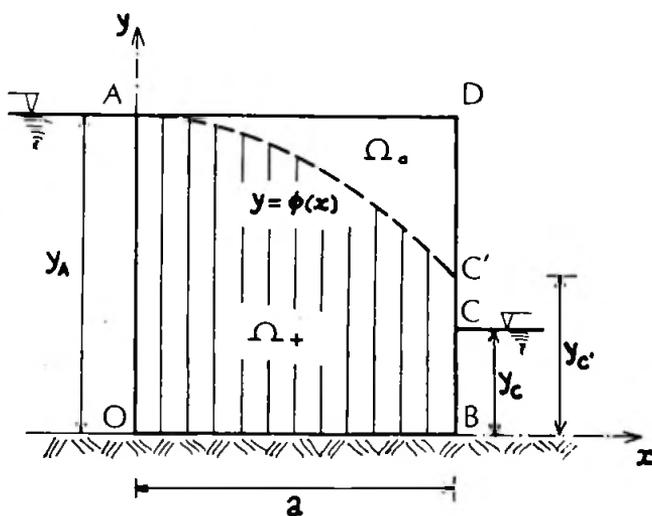
$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta\rho) + \text{div}(\eta\rho\underline{v}) = 0 \quad (1)$$

(ii) Conservação da quantidade de movimento linear

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta\underline{v}) + \eta\underline{v} \text{ grad}(\eta\underline{v}) = - \frac{1}{\rho} \text{ grad } p + \underline{\dot{g}} + \underline{F} \quad (2)$$

em que:

- $\eta$   $\equiv$  porosidade do meio.
- $\rho$   $\equiv$  densidade do fluido.
- $p$   $\equiv$  pressão hidrostática.
- $g$   $\equiv$  força gravitacional.
- $F$   $\equiv$  resistência viscosa por unidade de massa.
- $y$   $\equiv$  velocidade.



**FIGURA 1** - Problema de percolação com fronteira livre.

Supondo que o fluido é homogêneo e incompressível, e o escoamento é estacionário e do tipo que se comporta segundo a lei de Darcy, as equações (1) e (2) tomam a forma seguinte:

$$\text{div } \underline{q} = 0 \quad (3)$$

$$- \text{grad} \left( \frac{P}{\rho g} + y \right) + \frac{F}{g} = 0 \quad (4)$$

A lei de Darcy estabelece que

$$\underline{q} = - K \frac{F}{g} \quad (5)$$

onde K representa a condutividade hidráulica ou coeficiente de percolação.

Introduzindo agora a variável

$$u = \frac{P}{\rho g} + y \quad (6)$$

que representará a altura piezométrica, obtêm-se de (4) e (5) a expressão referida por muitos autores como lei de Darcy

$$\underline{q} = - K \text{ grad } u \quad (7)$$

Combinando as equações (3) e (7) tem-se a equação de equilíbrio

$$\text{div } (K \text{ grad } u) = 0 \quad (8)$$

A condutividade hidráulica está relacionada com a permeabilidade do meio poroso, a densidade e a viscosidade  $\mu$  do fluido através da expressão:

$$K = \frac{k\rho g}{\mu} \quad (9)$$

Para facilitar o desenvolvimento, admitiu-se que no problema aqui tratado, a condutividade hidráulica terá valor unitário.

Propõe-se então resolver o seguinte problema:

Problema P1 - Conhecidos os parâmetros  $a$ ,  $y_A$  e  $y_C$  de maneira que

$$\left. \begin{array}{l} y_A > y_C \geq 0 \\ a > 0 \end{array} \right\} \quad (10)$$

determinar a função  $\phi(x)$ , que representa a superfície livre, com as seguintes propriedades:

- (i)  $\phi(x)$  é definida e regular no intervalo  $[0, a]$ .
- (ii)  $\phi(0) = y_A$  e  $\phi(a) \geq y_C$

Ainda mais, se denotarmos por  $\Omega_+$  o conjunto

$$\Omega_+ = \{(x, y) | 0 < x < a, 0 < y < \phi(x)\} \quad (11)$$

existe uma função  $u(x, y)$  definida e regular no fecho  $\bar{\Omega}_+$  de  $\Omega_+$ , satisfazendo a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega_+ \quad (12)$$

e às seguintes condições de contorno

$$u = y_A \quad \text{em } \overline{OA} \quad (13)$$

$$u = y \quad \text{em } \overline{CC'} \cup \widehat{AC'} \quad (14)$$

$$u = y_C \quad \text{em } \overline{BC} \quad (15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{em } \overline{OB} \quad (16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{em } \widehat{AC'} \quad \square \quad (17)$$

### 3. FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Partindo do problema de valor de contorno apresentado no item 2, é possível estabelecer uma forma variacional para o problema da percolação. .

Para tanto, basta multiplicar a equação (12) por uma função  $\phi$  pertencente ao espaço das variações admissíveis  $V$ , e integrar por partes. Tem-se assim o problema P2 descrito a seguir.

O espaço  $V$  referido anteriormente é definido por:

$$V = \{ \phi(x,y) \in C^1(\overline{\Omega}) ; \phi(x,y) = 0 \quad \text{na vizinhança} \\ \text{de } \overline{OA} \cup \overline{BD} \} \quad (18)$$

Problema P2. Determinar  $\phi(x)$ ,  $u(x,y)$  e  $\Omega_+$  tal que

- (i)  $\phi(x)$  seja uma função contínua e estritamente decrescente no intervalo  $[0, a]$
- (ii)  $\phi(0) = y_A$  ;  $\phi(a) \geq y_C$  (19)
- (iii)  $u \in H^1(\Omega_+) \cap C^0(\bar{\Omega}_+)$  e satisfaz as condições (13)– (15) no sentido de  $C^0(\Omega_+)$
- (iv) 
$$\int_{\Omega_+} \text{grad } u \text{ grad } \phi \text{ dx dy} = 0 \quad \forall \phi \in V \quad \square \quad (20)$$

O problema P2 apresenta o inconveniente de ter o domínio  $\Omega_+$  como uma das incógnitas. Para contornar essa dificuldade Baiocchi<sup>2</sup>, sugere uma transformação de variáveis, de modo que as três incógnitas iniciais ficam reduzidas a uma única, definida sobre um domínio conhecido.

Para introduzir a transformação de Baiocchi, considere  $\bar{u}$  como sendo a extensão de  $u$  a todo  $\Omega$  definida assim:

$$\bar{u} = \begin{cases} u & \text{em } \Omega_+ \\ y & \text{em } \Omega_0 \end{cases} \quad (21)$$

A transformação de variáveis será então

$$w(x, y) = \int_y^{y_A} [\bar{u}(x, s) - s] ds \quad (22)$$

Das condições (13)– (17) deduz-se facilmente que  $w = g$  no contorno  $\Gamma$  de  $\Omega$ , onde

$$g = \frac{1}{2}(y_A - y)^2 \quad \text{em} \quad [OA] \quad (23)$$

$$g = \frac{1}{2}(y_C - y)^2 \quad \text{em} \quad [BC] \quad (24)$$

$$g = \frac{1}{2} y_A^2 - \frac{1}{2a}(y_A^2 - y_C^2)x \quad \text{em} \quad [OB] \quad (25)$$

$$g = 0 \quad \text{nas restantes partes de } \Gamma. \quad (26)$$

Por outro lado, verifica-se que  $w$ , tal como foi definido em (22), possui as seguintes propriedades:

$$(i) \quad w = 0 \quad \text{em} \quad \Omega_0 = \Omega - \Omega_+ \quad (27)$$

$$(ii) \quad w > 0 \quad \text{em} \quad \Omega_+ \quad (28)$$

$$(iii) \quad w \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \quad (29)$$

$$(iv) \quad \int_{\Omega} (\nabla w \cdot \nabla \phi) \, dx dy + \int_{\Omega_+} \phi \, dx dy = 0 \quad ; \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \quad (30)$$

Para uma verificação de (30) basta substituir

$$\phi = \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad \text{na equação (20),}$$

em que  $\xi$  é uma função  $\xi(x, y) \in H_0^1(\Omega)$ .

Então

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla w \cdot \nabla \phi) \, dx dy &= \int_{\Omega_+} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) dx dy \\ &= - \int_{\Omega_+} \nabla \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cdot \nabla \xi \, dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega_+} (\nabla u \cdot \nabla \phi) \, dx \, dy - \int_{\Omega_+} \frac{\partial \xi}{\partial y} \, dx \, dy \\
&= \int_{\Omega_+} (\nabla u \cdot \nabla \phi) \, dx \, dy - \int_{\Omega_+} \phi \, dx \, dy.
\end{aligned}$$

Observação. A transformação de Baiocchi tal como foi apresentada em (22), aplica-se apenas ao caso de um meio poroso constituído de material homogêneo e maciço com secção transversal retangular. Para outros casos recomenda-se consultar Baiocchi<sup>2</sup> e Baiocchi, Comincioli e Magenes<sup>3</sup>.  $\square$

Vejamos agora como a transformação de Baiocchi conduz de maneira natural à formulação do problema da percolação como uma inequação variacional.

Seja  $K$  um conjunto convexo fechado definido por :

$$K = \{v \mid v \in H^1(\Omega); v|_{\Gamma} = g; v \geq 0 \text{ quase sempre em } \Omega\} \quad (31)$$

Tem-se então que as equações (27)–(30) são equivalentes à seguinte inequação variacional

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla (v-w) \, dx \, dy + \int_{\Omega} (v-w) \, dx \, dy \geq 0 \quad \forall v \in K \quad (32)$$

Para verificar a afirmativa acima, observe que se  $v \in K$ ,  $v-w \in H_0^1(\Omega)$ ; então de (30) vem

$$\begin{aligned}
 \int \nabla w \cdot (v-w) dx dy &= \langle -\Delta w, (v-w) \rangle \\
 &= - \langle \chi_{\Omega_+}, (v-w) \rangle \\
 &= - \int_{\Omega_+} (v-w) dx dy \\
 &\geq - \int_{\Omega} (v-w) dx dy
 \end{aligned}$$

uma vez que,  $v \geq 0$  em  $\Omega$  e  $w = 0$  em  $\bar{\Omega}_0 = \bar{\Omega} - \bar{\Omega}_+$ .

Resulta assim uma outra formulação para o problema (P2), em termos da inequação (32)

Problema P3. Determinar  $w \in K$ , tal que

$$a(w, v-w) + \ell(v-w) \geq 0 \quad \forall v \in K \quad (33)$$

onde

$a(\cdot, \cdot)$  - é uma forma bilinear sobre  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$

e

$\ell(\cdot)$  - é um funcional linear contínuo sobre  $H^1(\Omega)$ , de finidos de maneira óbvia através de (32) e (33).  $\square$

Resta então saber se a inequação variacional (33) possui solução e como obtê-la. A resposta está contida no teorema a seguir.

Teorema 1 - A inequação variacional (33) possui uma única solução  $w \in K$ . Ainda mais, obtida a solução  $w$ , determina-se  $\Omega_+$ ,  $\phi(x)$  e  $u$  através de

$$(i) \quad \Omega_+ = \{(x,y) \mid (x,y) \in \Omega; w > 0\} \quad (34)$$

$$(ii) \quad \phi(x) = \sup\{t \mid (x,t) \in \Omega_+\}; \quad 0 < x < a;$$

$$\phi(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x); \quad \phi(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \phi(x) \quad (35)$$

(iii)  $u$  é a restrição a  $\Omega_+$  da função

$$y - \frac{\partial w}{\partial y} \quad (36)$$

Demonstração:

(a) Existência - Será demonstrada aqui apenas a primeira parte do teorema, uma vez que as propriedades (34) - (36) são de correntes da transformação da variável introduzida por Baiocchi.

Inicialmente mostra-se que devido à simetria da forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$  a resolução da inequação (33) é equivalente à minimização de um funcional.

A existência de um mínimo para este funcional sobre  $K$  definirá a solução de (33).

A forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$  é contínua e coerciva. A continuidade é consequência da desigualdade de Schwarz, enquanto que a coercividade resulta da aplicação da desigualdade de Poincaré. Então

$$(Continuidade) \quad |a(w, v-w)| \leq c \|w\|_{H^1} \|v-w\|_{H^1} \quad (37)$$

(Coercividade)  $a(v-w, v-w) \geq \alpha \|v - w\|_{H^1}^2$  (38)

O fato da forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$  ser simétrica, permite construir um funcional

$$J : H^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

definido por:

$$J(v) = a(v, v) - 2\ell(v) \quad (39)$$

tal que  $J$  é contínuo, portanto semi-contínuo inferiormente, coercivo e estritamente convexo.

(i) semi continuidade inferior.

Seja  $v_n \rightarrow v \in K$  uma sequência fracamente convergente. Logo, devido à continuidade de  $a(\cdot, \cdot)$  e  $\ell(\cdot)$

$$a(v_n, v) \rightarrow a(v, v)$$

$$a(v, v_n) \rightarrow a(v, v)$$

$$\ell(v_n) \rightarrow \ell(v)$$

Então

$$\lim J(v_n) = J(v) \quad (40)$$

e nesse caso  $J(u)$  é mais do que semi-contínuo: é, na verdade, contínuo.

Em consequência da continuidade de  $J$ , tem-se

$$J(w) = \liminf_{v_n \in K} J(v_n) \quad (41)$$

(ii) Coercividade.

$$J(v) = a(v, v) - 2\ell(v)$$

sendo  $a(v, v)$  coerciva e  $\ell(v)$  contínuo,

$$J(v) \geq \alpha \|v\|_{H^1}^2 - 2\|\ell\|_{H^{-1}} \|v\|_{H^1}$$

que implica em

$$\lim_{\|v\|_{H^1} \rightarrow +\infty} J(v) = +\infty \quad (43)$$

(iii) Convexidade estrita.

$\ell(v)$  sendo linear é convexo; resta portanto demonstrar a convexidade de  $a(v, v)$ .

$$\begin{aligned} a(\theta u + (1-\theta)v, \theta u + (1-\theta)v) &= \theta^2 a(u, u) \\ &+ 2\theta(1-\theta)a(u, v) + (1-\theta)^2 a(v, v); \theta \in (0, 1). \end{aligned}$$

Mas da coercividade de  $a(v, v)$  tem-se

$$a(v, v) + a(u, u) - 2a(u, v) = a(v-u, v-u) \geq \alpha \|v-u\|_{H^1}^2$$

$$a(v, v) + a(u, u) > 2a(u, v) \quad \text{para } u \neq v.$$

$$\begin{aligned} a(\theta u + (1-\theta)v, \theta u + (1-\theta)v) &< \theta^2 a(u, u) + \theta(1-\theta)a(u, u) \\ &+ \theta(1-\theta)a(v, v) + (1-\theta)^2 a(v, v) \\ &= \theta a(u, u) + (1-\theta)a(v, v) \quad \forall u, v \in H^1; \theta \in (0, 1). \end{aligned}$$

Considerando agora uma seqüência minimizante  $v_n$

$$J(v_n) \rightarrow \inf_{v \in K} J(v) \quad (44)$$

e o fato de  $J(v)$  ser contínuo implica que

$$J(w) = \liminf J(v_n) \quad (45)$$

De (44) e (45) conclui-se que

$$J(w) = \inf_{v \in K} J(v) \quad (46)$$

Ficou demonstrado até aqui que  $w \in K$  minimiza  $J(v)$  sobre  $K$ . Vejamos agora se  $w$  obtido em (46) é solução de (33).

$$J(w) \leq J(v) \quad \forall v \in K.$$

Entretanto, se  $v \in K$  e  $\theta \in (0,1)$

$$J((1-\theta)w + \theta v) \geq J(w),$$

$$\frac{1}{\theta} [J(w + \theta(v-w)) - J(w)] \geq 0$$

Se o  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} [J(w + \theta(v-w)) - J(w)] \geq 0$  existe, escreve-se

$$J'(w) \cdot (v-w) \geq 0 \quad ; \quad v \in K$$

como

$$J'(w) \cdot (v-w) = a(w, v-w) - \ell(v-w)$$

tem-se

$$a(w, v-w) - \ell(v-w) \geq 0.$$

(b) Unicidade<sup>3</sup> - Sejam  $w_1$  e  $w_2$  duas soluções de (46), com  $w_1 \neq w_2$ , e seja  $m = \inf_{v \in K} J(v)$ .

Então

$$\frac{w_1 + w_2}{2} \in K.$$

Seja  $J$  estritamente convexo

$$J\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right) < \frac{1}{2} [J(w_1) + J(w_2)] = m$$

o que contradiz a hipótese de  $m = \inf_{v \in K} J(v)$ .  $\square$

Do Teorema 1 resulta que o problema P3 é equivalente ao seguinte problema de minimização:

Problema P4. Determinar  $w \in K$ , tal que

$$J(w) \leq J(v) \quad \forall v \in K \tag{47}$$

sendo  $J(v)$  definido em (39).  $\square$

#### 4. REGULARIDADE DA SOLUÇÃO

Uma vez demonstrada a existência e unicidade da solução do problema (P3), ou seu equivalente (P4), é necessário para o estudo do erro na solução aproximada, investigar o grau de derivabilidade da solução, e sua dependência com os dados.

O teorema a seguir é uma aplicação dos trabalhos de Brezis - Stampacchia<sup>5</sup>. Veja também Baiocchi<sup>3</sup>

Teorema 2 - Seja  $w$  a solução da inequação variacional (33). Então  $w$  possui as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} w) &\in L^\infty(\Omega) \\ w &\in H^2(\Omega) \end{aligned} \quad (48)$$

O resultado do teorema 2 é de importância fundamental no estabelecimento das estimativas de erro na solução aproximada (P4).

A seguir descreve-se a aproximação pelo método dos elementos finitos do problema (P4).

#### 5. APROXIMAÇÃO COM ELEMENTOS FINITOS

A formulação aqui adotada é aquela apresentada por Oden e Reddy<sup>13</sup>, e consiste em escolher uma malha triangular uniforme  $T_h$  em  $\Omega$  (elementos triangulares com dimensões aproximadamente iguais), sobre a qual define-se um espaço de aproximações  $S_h$  com as seguintes propriedades

$$(i) \quad S_h \subset H^1(\Omega) \quad (49)$$

onde  $h$  é um parâmetro escolhido de maneira que, se  $h$  tende a zero, a dimensão de  $S_h$  tende para infinito. ( $h$  é a máxima dimensão do elemento).

$$(ii) \quad P_1 \subset S_h \quad (50)$$

sendo  $P_1$  o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a um, sobre  $T_h$ .

(iii) Para cada  $v \in H^r$ ,  $r \geq 0$  e

$$0 \leq s \leq \min \{1, r\}$$

existe um  $v_h \in S_h$  e uma constante positiva  $\hat{C}$  independente de  $h$  e de  $v$ , tal que

$$\|v - v_h\|_{H^s} \leq \hat{C} h^\sigma \|v\|_{H^r} \quad (51)$$

sendo  $\sigma = \min \{2-s, r-s\}$ .

O convexo  $\hat{K}$  aproximação de  $K$  é definido por:

$$\hat{K} = \{v_h \in S_h ; v_h = g_h \text{ sobre } \Gamma_h, v_h \geq 0 \text{ q.s. em } \Gamma_h\} \quad (52)$$

em que denota-se:

$\Omega_h$  - um triângulo típico de  $T_h$

$\Gamma_h$  - os pontos de  $T_h$  pertencentes à interseção de  $\Gamma$  com  $T_h$

$g_h$  - restrição da função  $g(x,y)$  à  $\Gamma_h$

Tal como foi definido,  $\hat{K}$  tem as seguintes propriedades:

- (i)  $\hat{K} \subset S_h \subset H^1(\Omega)$
- (ii)  $\hat{K}$  é um convexo fechado mas não necessariamente contido em  $K$ .

Escreve-se então o problema aproximado de (P4) assim:

Problema P4'. Determinar  $w_h \in \hat{K}$ , tal que

$$J_h(w_h) \leq J_h(v_h) \quad \forall v_h \in \hat{K} \quad (53)$$

onde

$$J_h(v_h) = a(v_h, v_h) - 2\ell(v_h). \quad \square \quad (54)$$

Que o problema aproximado (P4') possui solução é evidente, faltaria no entanto mostrar que se  $h$  tende a zero,  $w_h \rightarrow w$  em  $H^1(\Omega)$ . O teorema 3 garante esse resultado.

Teorema 3 - Suponha que  $\hat{K}$  tem as propriedades definidas anteriormente e que aproxima  $K$  no seguinte sentido:

- (i) Para qualquer  $v \in K$ , pode-se encontrar um  $v_h \in \hat{K}$ , tal que  $v_h \rightarrow v$  em  $H^1(\Omega)$ ;
- (ii) Se  $w_h \in \hat{K}$ ,  $w_h \rightarrow w$  em  $H^1(\Omega)$  fraco,  $w \in K$ .

Então  $w_h$  é a solução de (53) e tem-se  $w_h \rightarrow w$  em  $H^1(\Omega)$ , sendo  $w$  a solução de (47).

Para uma demonstração, veja Glowinski, Lions, Trémolières <sup>7</sup>.

## 6. ESTIMATIVAS DO ERRO

Apresenta-se aqui uma avaliação do erro cometido quando se utiliza elementos finitos com aproximação linear na resolução do problema (P4).

Omitiu-se a demonstração do lema 1 e teorema 4 que se seguem, porque escapam ao propósito deste trabalho.

Lema 1 (Erro na aproximação). - Seja  $a(w, v-w)$  uma forma

bilinear, contínua e coerciva em  $H_0^1$  e  $S_h$ . Então tem-se

$$\begin{aligned}
 a(w-w_h, w-w_h) \leq & \langle -1 + \Lambda w, w-w_h \rangle + \langle -1 + \Lambda w, w_h - v \rangle + \\
 & + a(w - w_h, w - v_h) \quad \forall v \in K \text{ e } v_h \in \hat{K}
 \end{aligned} \tag{55}$$

Para uma demonstração veja Kikuchi<sup>10</sup>.

Reunindo agora o resultado do teorema de regularidade, a propriedade (iii) do subespaço  $S_h$ , e o lema anterior, demonstra-se o seguinte:

Teorema 4<sup>10</sup> - Seja  $w$  a solução da inequação (33) com  $w \in K \cap H^2$ ,  $w_h \in S_h$  a solução do problema aproximado de (33). Então, para  $h$  suficientemente pequeno, e uma aproximação com elementos finitos lineares a seguinte estimativa é verdadeira.

$$\|w-w_h\|_{H^1(\Omega)} = \|e\|_{H^1(\Omega)} \tag{56}$$

$$\|e\|_{H^1(\Omega)} \leq O(|h|) \tag{57}$$

## 7. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA P4'

O problema (P4') é resolvido com o auxílio de um algoritmo bastante conhecido em programação não-linear, atribuído a Uzawa<sup>17</sup>, e constitui-se numa generalização do conhecido método da relaxação, utilizado na resolução de sistemas de equações lineares.

### Algoritmo

(1) - Escolhe-se um vetor inicial  $w^{(0)}$  pertencente a  $\hat{K}$

(por exemplo  $w_k^{(0)} = 0$ ).

(2) - Calcula-se a componente  $w_k^{(n+1)}$  da enésima iteração a partir do valor obtido na iteração anterior

$w_k^{(n)}$  assim:

$$w_k^{(n+1)} = \text{Max} \{0, w_k^{(n+\frac{1}{2})}\} \quad (58)$$

em que

$$w_k^{(n+\frac{1}{2})} = w_k^{(n)} - \frac{\rho}{a(\psi_k, \psi_k)} \left[ \sum_{j=1}^{k-1} a(\psi_k, \psi_j) w_j^{(n+\frac{1}{2})} + \sum_{j=k}^N a(\psi_k, \psi_j) w_j^{(n)} - \ell(w_k^{(n)}) \right] \quad (59)$$

(3) - Repete-se a etapa (2) até obter-se a convergência para uma tolerância especificada. (Veja item (iv) do parágrafo 8).

No algoritmo descrito  $\rho$  representa o parâmetro de relaxação ( $0 < \rho < 2$ ), escolhido através de testes numéricos de modo a permitir a convergência com o menor número possível de iterações.

As funções  $\psi_k(x,y)$  e  $\psi_j(x,y)$ , pertencem a  $S_h$  e representam funções da base local utilizada na interpolação em cada elemento (funções de interpolação).

## 8. RESULTADOS NUMÉRICOS

Para ilustrar a técnica de resolução descrita neste trabalho escolheu-se um exemplo típico de percolação com as seguintes características:

(i) - Parâmetros geométricos dimensionais:

$$y_A = 3.22 ; y_C = 0.84 ; a = 1.62$$

(ii) - Discretização em elementos finitos triangulares lineares com uma malha de  $(20 \times 30)$ .

(iii) - Parâmetro de relaxação  $\rho = 1.7$  (escolhido).

(iv) - Teste para interromper as iterações

$$\sum_{k=1}^N |w_k^{(n+1)} - w_k^{(n)}| \leq 10^{-5}.$$

Na figura 2 apresenta-se o gráfico da função  $\phi_h(x)$ , aproximação de  $\phi(x)$ .

Além do exemplo anterior, realizou-se testes com outro problema tendo as seguintes características

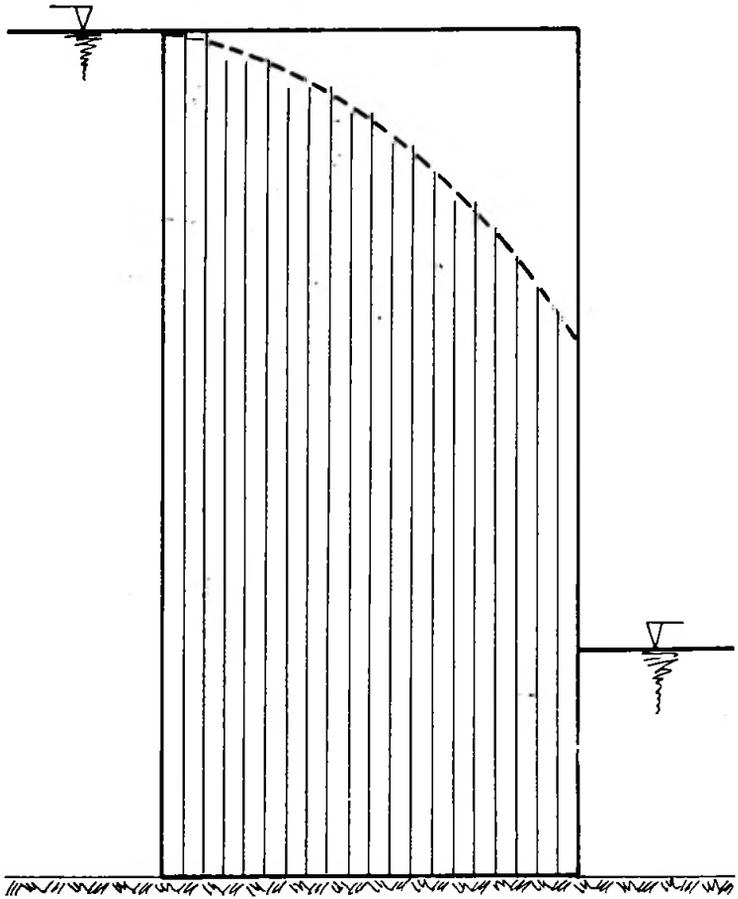
(i) - Parâmetros geométricos dimensionais.

$$y_A = 1.0 ; y_C = 0.4 ; a = 1.0$$

(ii) - Discretização em elementos finitos triangulares lineares com malhas de  $(5 \times 5)$  e  $(10 \times 10)$ .

Manteve-se aqui as características (iii) e (iv) do problema anterior.

As aproximações de  $\phi(x)$  são indicadas nas figuras 3 e 4.



**FIGURA 2** - Fronteira livre com malha de  $(20 \times 30)$   
para  $y_A = 3.22$ ;  $y_C = 0.84$ ;  $a = 1.62$  .

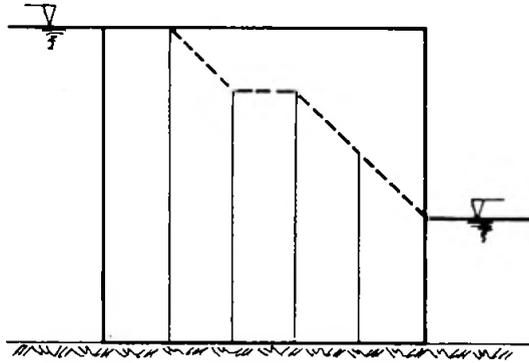


FIGURA 3 - Fronteira livre com malha de  $(5 \times 5)$   
 para  $y_A = 1.0$  ;  $y_C = 0.4$  ;  $a = 1.0$  .

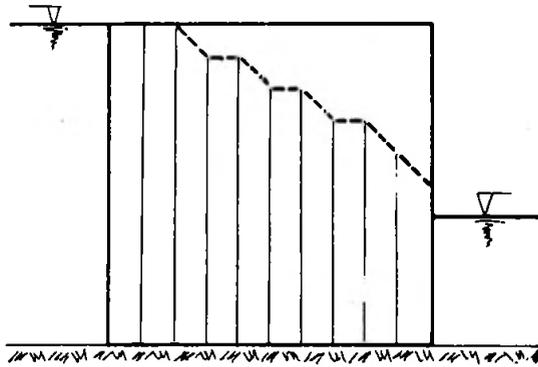


FIGURA 4 - Fronteira livre com malha de  $(10 \times 10)$   
 para  $y_A = 1.0$  ;  $y_C = 0.4$  ;  $a = 1.0$   
 i

## 9. COMENTÁRIOS FINAIS

Os experimentos numéricos realizados revelaram que o método aqui apresentado tem as seguintes propriedades

- (1) - Quando se utiliza elementos lineares, para que se obtenha a fronteira livre bem definida é necessário uma malha refinada ( $h$  pequeno).
- (2) - A posição do ponto  $C'$  na figura 1, fica automaticamente definida, uma vez conhecida a função  $w$ .
- (3) - Embora o algoritmo de resolução seja iterativo, não é necessário corrigir a fronteira livre a cada iteração. A determinação dos  $w_k$  definirá ao final das iterações a posição da fronteira livre.
- (4) - A convergência do processo iterativo utilizado é assegurada pelo Teorema 3.

Um estudo comparativo entre o método aqui utilizado e as técnicas usuais de resolução do problema será objeto de um trabalho a ser apresentado futuramente.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - ARAVIN, V. I. & NUMEROV, S. N. Theory of fluid flow in Undeformable porous media. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translation, 1965
- 2 - BAIOCCHI, C. Su un problemi di frontiera libera conesso o questioni di idraulica. Ann. di Mat. Pura ed Appl. (4):92, 107-127, 1972.
- 3 - BAIOCCHI, C. et alli. Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media. Ann di Mat. Pura ed Appl. (4):97, 1-82, 1973.
- 4 - BEAR, J. Dynamic of fluid flow in porous media. New York, American Elsevier, 1972.
- 5 - BREZIS, H. et STAMPACCHIA, C. Sur la regularité de la solution d'inéquations elliptiques. Bull. Soc. Mat. France 96, 153-180, 1968.
- 6 - CASAGRANDE, A. Seepage through dams. IN:Contributions to soil mechanics, 1925-1940. Boston, Soc. of Civil Engineers, 1940.
- 7 - GLOWINSKI, R.; LIONS, J. L; TREMOLIÈRES, R. Analyse numérique des inequations variationnelles. Paris, Dunod, 1976. v.1
- 8 - HARR, M. E. Groundwater and seepage. New York, McGraw-Hill, 1962.
- 9 - JEPPSON; R. W. Seepage from ditches- Solution by finite differences. J. Hydraulics Division Proceedings. New York, ASCE, 94: 259, 1968
- 10 - KIKUCHI, N. S. An analysis of the variational inequalities of seepage flow by finite element method. Quartely of appl. Math. (35):149-163, April, 1977.

- 11 - MUSKAT, M. The flow of homogeneous fluid through porous media. New York, McGraw-Hill, 1937.
- 12 - NEUMAN, S. P. & WHITHERSPOON, P. A. Finite element method of analyzing steady seepage with a free surface. Water resources research 6(9):889-97, 1970.
- 13 - ODEN, J. T. & REDDY, J. N. An introduction to the mathematical theory of finite elements. New York, Wiley Interscience, 1976.
- 14 - POLUBARINOVA - KOCHINA, P. Ya. The theory of groundwater movement. Princeton, N. J., Princeton Univ. Press, 1962.
- 15 - TAYLOR, R. L. & BROWN, C. B. Darcy flow solutions with a free surface. J. Hydraulics Division. Proceedings ASCE, New York, 93:25-33, 1967.
- 16 - TODSEN, M. On the solution of transient free-surface flow problems in porous media by finite difference methods. J. Hidrology, 12:170-210, 1971
- 17 - UZAWA, H. IN: Arrow, I; Hurwicz, L; Linear and non-linear programming. Stanford University Press, 1972.

## RESUMO

Partindo de um modelo simplificado, mostra-se que o problema da percolação de água através de um maciço poroso, pode ser descrito por uma inequação variacional elíptica usando uma transformação idealizada por BAIOCCHI.

Para a inequação variacional obtida, estuda-se uma aproximação com elementos finitos e um algoritmo para resolução numérica do problema aproximado.

## SUMMARY

Starting from a simplified model, it is shown that the seepage flow problem through a porous media can be modeled by an elliptic variational inequality, using Baiocchi transformation. A finite element approximation is then discussed together with a numerical procedure to solve the approximate problem.