«OSCILOGRAMAS, SUA ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO»

CARLOS FURTADO DE SIMAS
Prof. Catedrático de «Física Aplicada»

Na matemática, como nas aplicações práticas, as series de Fourier (cujos termos isolados são funções trigonometricas) são periodicas, isto é, repetem-se em intervalos definidos de tempo. A equação representativa de uma tal função é:

$$f(x+2\pi)=f(x) \text{ na qual } 2\pi \text{ é o período.}$$

Não pretendemos entrar na teoria da análise harmônica a qual pode ser encontrada em tratados de matemática mas, apenas, mostrar algumas idéias por nós utilisadas, que trazem simplificações no trabalho de cálculo, evitam os erros naturais destas operações e diminuem, consideravelmente, o tempo para a análise de um fenomeno periodico qualquer representado pelo seu oscilograma.

A análise harmônica visa a obtenção das componentes simples que, uma vez adicionadas, constituem o fenomeno complexo. Em Acustica, como em eletricidade, no estudo das marés, do movimento das máquinas, da vibração de estruturas, encontra vasto campo de aplicação.

O seu objetivo é buscar a forma, amplitude e fase dos elementos simples (armônicos) que, superpostos, reproduzirão a curva sob análise e, além disto, a sua equação.

Para tanto dispomos do teorema de Fourier, dos varios esquemas baseados nas formulas de Bessel, as quais permitem o calculo das constantes da série.

Neste trabalho preferimos, dentre as varias sistematisações existentes, utilisar a apresentada por E. Rufener e E. Guyot (1).

Seja a equação representativa de um fenomeno periodico em sua forma trigonométrica:

$$y = a_0 + a_1.\cos x + a_2.\cos 2x + \ldots + a_p.\cos px + b_1.\operatorname{sen} x + \ldots + b_{(p-1)}\operatorname{sen}[(p-1)x]$$

O cálculo dos coeficientes $a_0, a_1 \ldots b_1, b_2 \ldots$ constantes da série, é feito com as formulas de Bessel:

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum y_K = \frac{1}{n} (y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$$

$$a_r = \frac{2}{n} \sum y_K.\cos r.x_K = \frac{2}{n} (y_0.\cos r x_0 + y_1.\cos r x_1 + \ldots)$$

$$b_r = \frac{2}{n} \sum y_K.\operatorname{sen} rx_K = \frac{2}{n} (y_0.\operatorname{sen} rx_0 + y_1.\operatorname{sen} rx_1 + \ldots)$$

nas quais *n* é o número de intervalos em que subdividimos o periodo analisado; geralmente 6, 12 ou 24 partes dependendo do tipo da curva e da precisão desejada.

Considerando um ponto *P* do armônico de ordem *r* suas coordenadas cartesianas serão a_r e b_r. Chamando c_r e φr as coordenadas polares deste ponto subsistem as relações: (Fig. 1)

$$c_r = \sqrt{a_r^2 + b_r^2}$$

$$\operatorname{tang} \varphi r = \frac{a_r}{b_r}$$

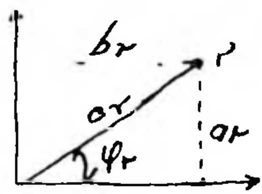


Fig. 1

as quais permitem calcular a amplitude *c* e o ângulo de fáse φ para o harmônico de ordem *r*.

Podemos, com estes elementos apenas, determinar as constantes, obter a esquação da curva e conhecer as amplitudes e a fase dos harmônicos, concluindo o que denominamos de 1ª parte do estudo.

Na 2ª parte deve ser possivel obter a representação de todos os harmônicos cujas ordenadas serão analiticamente calculadas chegando-se a uma notavel precisão. Foi nesta parte que introduzimos as nossas ideias, que passaremos a expôr, desenvolvendo, para maior clareza, um exemplo compléto:

A Fig. 2 representa um periodo, devidamente determinado, do registro de um fenômeno periodico de qualquer natureza. Adotado o esquema de 24 intervalos, estes representarão

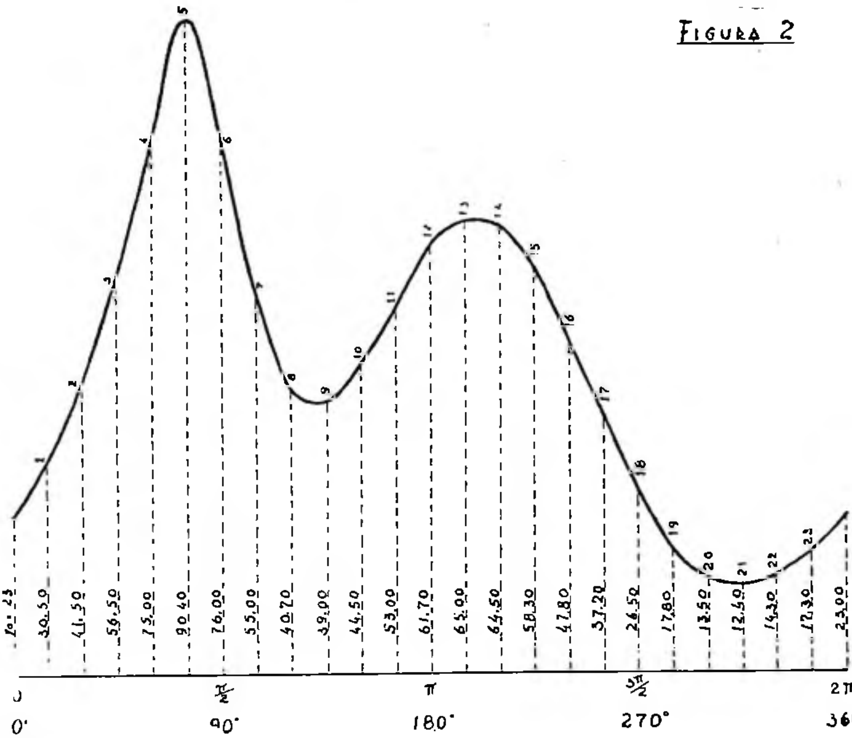


FIGURA 2

$\frac{360}{24} = 15^{\circ}$. Como vêm, a linha de base está situada abaixo da curva, de modo que as suas ordenadas y_0 a y_{23} são todas positivas, facilitando o cálculo, e seus valores, lidos em escala, estão indicados.

Para o esquema de 24 ordenadas de acôrdo com a sistematisação de E. Rufener, os valores de y_0 a y_{23} são convenientemente inscritos nas tabelas **1** e **1ª** anexas. A partir destes por meio das somatórias $A + B$ e diferenças $A - B$ vamos obtendo os demais elementos que constam das tabelas **2** a **7**, os quais são introduzidos nas equações para o cálculo das constantes. Estas tabelas fornecem os valores de *s, d, p, q, r, t, l, u, m, v, k,* e *h*.

TABELA I

A	y_0	23,00	y_1	30,50	y_2	41,50	y_3	56,50	y_4	75,00	y_5	90,40	y_6	76,00
B		—	y_{23}	17,30	y_{22}	14,30	y_{21}	12,40	y_{20}	13,50	y_{19}	17,80	y_{18}	26,50
A + B	s_0	23,00	s_1	47,80	s_2	55,80	s_3	68,90	s_4	88,50	s_5	108,20	s_6	102,50
A − B		—	d_1	13,20	d_2	27,20	d_3	44,10	d_4	61,50	d_5	72,60	d_6	49,50

TABELA 1a

A	y_7	55,00	y_8	40,70	y_9	39,00	y_{10}	44,50	y_{11}	5[illegible],00	y_{12}	61,70		—
B	y_{17}	37,20	y_{16}	47,80	y_{15}	58,30	y_{14}	64,50	y_{13}	65,00		—		—
A + B	s_7	92,20	s_8	88,50	s_9	97,30	s_{10}	109,00	s_{11}	118,00	s_{12}	61,70		—
A − B	d_7	17,80	d_8	− 7,10	d_9	−19,30	d_{10}	−20,00	d_{11}	−12,00		—		—

TABELA 2

A	s_0	23,00	s_1	47,80	s_2	55,80	s_3	68,90	s_4	88,50	s_5	108,20	s_6	102,50
B	s_{12}	61,70	s_{11}	118,00	s_{10}	109,00	s_9	97,30	s_8	88,50	s_7	92,20		—
A + B	p_0	84,70	p_1	165,80	p_2	164,80	p_3	166,20	p_4	177,00	p_5	200,40	p_6	102,50
A − B	q_0	−38,70	q_1	−70,20	q_2	−53,20	q_3	−28,40	q_4	0	q_5	16,00		—

TABELA 3

A	d_1	13,20	d_2	27,20	d_3	44,10	d_4	61,50	d_5	72,60	d_6	49,50		—
B	d_{11}	−12,00	d_{10}	−20,00	d_9	−19,30	d_8	−7,10	d_7	17,80		—		—
A + B	r_1	1,20	r_2	7,20	r_3	24,80	r_4	54,40	r_5	90,40	r_6	49,50		—
A − B	t_1	25,20	t_2	47,20	t_3	63,40	t_4	68,60	t_5	54,60		—		—

TABELA 4

A	p_0	84,70	p_1	165,80	p_2	164,80	p_3	166,20
B	p_6	102,50	p_5	200,40	p_4	177,00		—
A + B	l_0	187,20	l_1	366,20	l_2	341,80	l_3	166,20
A − B	m_0	−17,80	m_1	−34,60	m_2	−12,20		—

TABELA 5

t_1	25,20	t_2	47,20	t_3	63,40
t_5	54,80	t_4	68,60		—
u_1	80,00	u_2	115,80	u_3	63,40
v_1	−29,60	v_2	−21,40		—

TABELA 6

A	l_0	187,20	l_1	366,20
B	l_3	166,20	l_2	341,80
A + B	k_0	353,40	k_1	708,00
A − B	h_0	21,00	h_1	24,40

TABELA 7

m_0	−17,80	m_1	−34,60
m_2	−12,20		—
e_0	−30,00	e_1	−34,60
f_0	−5,60		—

O cálculo das constantes é feito com as seguintes equações:

$$a_0 = \frac{1}{24}(k_0 + k_1)$$

$$a_1 = \frac{1}{12}(q_0 + 0{,}5\,q_4 + 0{,}707\,q_3 + 0{,}866\,q_2 + 0{,}966\,q_1 + 0{,}259\,q_5)$$

$$a_2 = \frac{1}{12}(m_0 + 0{,}5\,m_2 + 0{,}866\,m_1)$$

$$a_3 = \frac{1}{12}[q_0 - q_4 + 0{,}707\,(q_1 - q_3 - q_5)]$$

$$a_4 = \frac{1}{12}(h_0 + 0{,}5\,h_1)$$

$$a_5 = \frac{1}{12}(q_0 + 0{,}259\,q_1 - 0{,}866\,q_2 - 0{,}707\,q_3 + 0{,}5\,q_4 + 0{,}966\,q_5)$$

$$a_6 = \frac{1}{12}\,f_0$$

$$a_7 = \frac{1}{12}(q_0 - 0{,}295\,q_1 - 0{,}866\,q_2 + 0{,}707\,q_3 + 0{,}5\,q_4 - 0{,}966\,q_5)$$

$$a_8 = \frac{1}{12}(k_0 - 0{,}5\,k_1)$$

$$a_9 = \frac{1}{12}[q_0 - q_4 + 0{,}707\,(-q_1 + q_3 + q_5)]$$

$$a_{10} = \frac{1}{12}(m_0 + 0{,}5\,m_2 - 0{,}866\,m_1)$$

$$a_{11} = \frac{1}{12}(q_0 - 0{,}966\,q_1 + 0{,}866\,q_2 - 0{,}707\,q_3 + 0{,}5\,q_4 - 0{,}259\,q_5)$$

$$a_{12} = \frac{1}{24}(h_0 - h_1)$$

$$b_1 = \frac{1}{12}(0{,}259\,r_1 + 0{,}5\,r_2 + 0{,}707\,r_3 + 0{,}866\,r_4 + 0{,}966\,r_5 + r_6)$$

$$b_2 = \frac{1}{12}(0{,}5\,u_1 + 0{,}866\,u_2 + u_3)$$

$$b_3 = \frac{1}{12}[r_2 - r_6 + 0{,}707\,(r_1 + r_3 - r_5)]$$

$$b_4 = \frac{1{,}732}{24}(v_1 + v_2)$$

$$b_5 = \frac{1}{12}(0{,}966\,r_1 + 0{,}5\,r_2 - 0{,}707\,r_3 - 0{,}866\,r_4 + 0{,}259\,r_5 + r_6)$$

$$b_6 = \frac{1}{12}(u_1 - u_3)$$

$$b_7 = \frac{1}{12} (0{,}966\, r_1 - 0{,}5\, r_2 - 0{,}707\, r_3 + 0{,}866\, r_4 + 0{,}259\, r_5 - r_6)$$

$$b_8 = \frac{1{,}732}{24} (v_1 - v_2)$$

$$b_9 = \frac{1}{12} [r_6 - r_2 + 0{,}707 (r_1 + r_3 - r_5)]$$

$$b_{10} = \frac{1}{12} (0{,}5\, u_1 - 0{,}866\, u_2 + u_3)$$

$$b_{11} = \frac{1}{12} (0{,}25\, r_1 - 0{,}5\, r_2 + 0{,}707\, r_3 - 0{,}866\, r_4 + 0{,}966\, r_5 - r_6)$$

Substituindo os valores das tabelas 1 a 7, nas equações acima, obtivemos para as constantes:

$a_0 =$	44,22		
$a_1 =$	— 14,04	$b_1 =$	17,12
$a_2 =$	— 4,47	$b_2 =$	17,14
$a_3 =$	— 6,63	$b_3 =$	— 7,32
$a_4 =$	2,76	$b_4 =$	— 3,68
$a_5 =$	2,06	$b_5 =$	1,08
$a_6 =$	— 0,46	$b_6 =$	1,39
$a_7 =$	— 0,83	$b_7 =$	0,08
$a_8 =$	— 0,05	$b_8 =$	— 0,59
$a_9 =$	0,18	$b_9 =$	— 0,27
$a_{10} =$	0,50	$b_{10} =$	0,26
$a_{11} =$	— 0,08	$b_{11} =$	0,41
$a_{12} =$	— 0,14		

Fica conhecida a equação da curva dada que é a seguinte:

$$\boxed{\begin{aligned} y = {} & 44{,}22 - 14{,}04 \cos x - 4{,}47 \cos 2x - 6{,}63 \cos 3x + 2{,}76 \cos 4x + 2{,}06 \cos 5x - 0{,}46 \cos 6x - 0{,}83 \cos 7x - 0{,}05 \cos 8x \\ & + 0{,}18 \cos 9x + 0{,}50 \cos 10x - 0{,}08 \cos 11x - 0{,}14 \cos 12x + 17{,}12 \operatorname{sen} x + 17{,}14 \operatorname{sen} 2x - 7{,}32 \operatorname{sen} 3x \\ & - 3{,}68 \operatorname{sen} 4x + 1{,}08 \operatorname{sen} 5x + 1{,}39 \operatorname{sen} 6x + 0{,}08 \operatorname{sen} 7x - 0{,}59 \operatorname{sen} 8x - 0{,}27 \operatorname{sen} 9x + 0{,}26 \operatorname{sen} 10x + 0{,}41 \operatorname{sen} 11 x \end{aligned}}$$

Procedendo como anteriormente explicamos temos a seguir os valores das amplitudes e fases dos varios harmônicos:

armonico	amplitude c	fase φ
1º	22,136	320 º
2º	17,720	345 º
3º	9,870	222 º
4º	4,600	143 º
5º	2,320	62 º
6º	1,460	341 º
7º	0,695	354 º
8º	0,351	220 º
9º	0,324	146 º
10º	0,317	63º
11º	0,127	348 º

Nesta altura está concluida a primeira parte do estudo, pois conhecemos a equação da curva, os coeficientes dos termos da serie, as amplitudes e fases dos seus harmônios.

Trata-se, agora, de obter as ordenadas de cada harmônico isoladamente, o que exige um trabalho consideravel nesta hipotese de 24 ordenadas. Isto pode ser feito por via gráfica, porem esta, alem de não permitir bôa precisão. é praticamente impossivel quando o número de armônicos é elevado, como no caso presente, devendo ser por isto posta de lado.

Resta o calculo analitico das ordenadas de cada armônico, xeo que pode ser feito anulando-se todos os termos da equação excetuando os referentes ao armônico desejado. Para o primeiro harmônico, a equação seria:

$$y = a_1 . \cos x + b_1 . \operatorname{sen} x$$

sendo necessario calcular para as 24 ordenadas, em função de cos x e sen x, das constantes a_1 e b_1, variando-se x de 15 em 15º no esquema adotado.

Êste trabalho seria feito para cada harmônico, devendo, no caso, ser repetido 11 vezes. Considerando o cuidado a observar com os sinais dos cosenos, senos, e das constantes, podemos concluir que o trabalho se apresenta demorado e tedioso.

Foi neste ponto que introduzimos a simplificação que nos ocorreu quando, em trabalho com o Prof. Augusto Mascarenhas, catedrático de "Clínica Propedêutica" da Escola de Medicina da Universidade da Bahia, tivemos que efetuar uma serie muito grande de análise em registros cardiográficos de pacientes, para fins de estudo e pesquisa.

Cremos ter conseguido com a simplificação automatisar todo o trabalho, com o que as possibilidades de erro diminuem consideravelmente, crescendo, por conseguinte, a sua precisão. Todas as ordenadas dos varios harmônicos surgem, naturalmente, dos varios quadros correspondentes e, bem assim, a ordenada da curva, que nada mais é do que a soma das varias ordenadas dos seus harmônicos.

Preparamos dois quadros que denominamos dos "a. cos" e dos "b.sen" os quais contém os valores das constantes $a_1, a_2 \cdots$ $b_1, b_2 \cdots$ multiplicados respectivamente pelos cosenos e senos dos ângulos do primeiro quadrante, espaçados de **15°**.

Estes quadros para a curva que estamos analisando são os que se seguem:

Quadro dos "a.cos"

x =	0º	15º	30º	45º	60º	75º	90º
cos x =	1,000	0,966	0,866	0,707	0,500	0,259	0
a_1	14,040	13,560	12,160	9,930	7,020	3,640	0
a_2	4,470	4,320	3,860	3,160	2,230	1,160	0
a_3	6,630	6,400	5,740	4,690	3,315	1,720	0
a_4	2,760	2,670	2,390	1,950	1,880	0,710	0
a_5	2,060	1,990	1,780	1,460	1,030	0,530	0
a_6	0,460	0,440	0,400	0,320	0,230	0,120	0
a_7	0,830	0,800	0,720	0,590	0,415	0,214	0
a_8	0,050	0,048	0,040	0,035	0,025	0,013	0
a_9	0,180	0,170	0,150	0,130	0,090	0,046	0
a_{10}	0,500	0,480	0,430	0,350	0,250	0,129	0
a_{11}	0,080	0,077	0,070	0,060	0,040	0,020	0
a_{12}	0,140	0,130	0,110	0,1000	0,070	0,036	0

Quadro dos "b.sen"

x =	90º	75º	60º	45º	30º	15º	0º
sen x =	1,000	0,966	0,866	0,707	0,500	0,259	0
b_1	17,120	16,540	14,820	12,100	8,560	4,434	0
b_2	17,140	16,560	14,840	12,110	8,570	4,439	0
b_3	7,320	7,070	6,340	5,170	3,360	1,895	0
b_4	3,680	3,550	3,190	2,600	1,840	0,953	0
b_5	1,080	1,040	0,930	0,760	0,540	0,279	0
b_6	1,390	1,340	1,200	0,980	0,695	0,360	0
b_7	0,080	0,077	0,070	0,060	0,040	0,020	0
b_8	0,590	0,570	0,510	0,420	0,295	0,153	0
b_9	0,270	0,260	0,230	0,190	0,135	0,070	0
b_{10}	0,260	0,250	0,220	0,180	0,130	0,067	0
b_{11}	0,410	0,400	0,350	0,290	0,205	0,106	0

Os produtos indicados pelos quadros são em valor absoluto. Nestes quadros estão calculadas as ordenadas de todos os harmônicos da curva (em valôr absoluto) restando apenas utilisá-los de modo conveniente, considerando os sinais das constantes e o dos cosenos e senos.

Os dois quadros contém um total de 138 multiplicações fáceis de executar, se se dispõe de uma máquina de cálculo, em vez de 528 operações no caso do processo clássico citado.

Os quadros devem ser preparados de modo que sejam geometricamente iguais na parte que contem os produtos indicados. No cliché está entre os traços mais grossos.

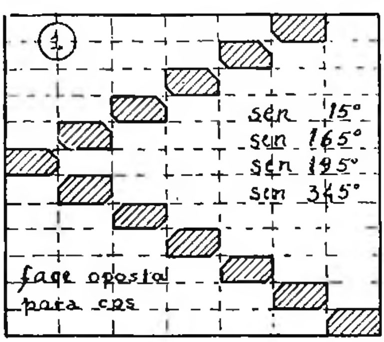
Vejamos agora o artificio que usamos para a obtenção das varias ordenadas a partir dos quadros acima, sem mais necessidade de qualquer operação a não ser o seu tabelamento conveniente. Este consiste na confeção, em cartolina ou papelão, de anteparos cujas dimensões são as dos quadros internos, cujo traço é forte no cliché, munidos de aberturas, cujo tamanho corresponde aos retangulos dos valores tabelados e dispostas em função dos ângulos a que se referem.

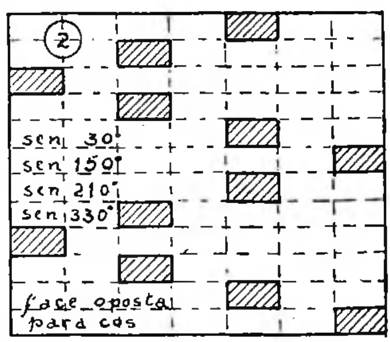
Sua construção e posição das aberturas basea-se no fáto que, prescindindo do sinal, temos:

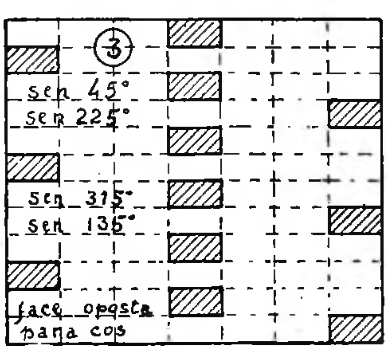
sen 15º = sen 165º = sen 195º = sen 345º (anteparo nº 1)
sen 30º = sen 150º = sen 210º = sen 330º (anteparo nº 2)
sen 45º = sen 225º = sen 315º = sen 135º (anteparo nº 3)
sen 75º = sen 105º = sen 255º = sen 285º (4 anteparo)
sen 60º = sen 120º = sen 240º = sen 300º (5 anteparo)
sen 90º = sen 270º (6 anteparo)

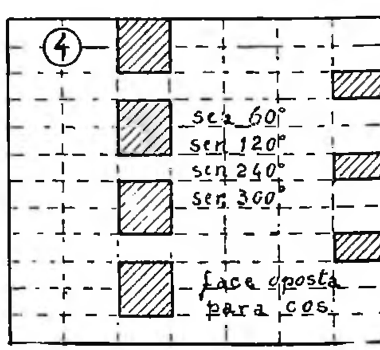
e como sen α = cos $(90 - \alpha)$ estes anteparos podem ser utilizados em suas duas faces aplicando-se a correspondente aos senos no quadro "B sen" e a oposta para o quadro "a.cos" nos mesmos ângulos de sua indicação.

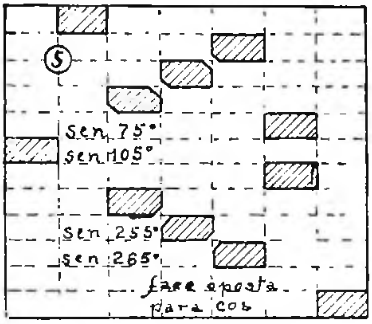
Os esquemas representativos das varias aberturas necessárias nos anteparos de modo a aparecerem os valores das ordenadas correspondentes dos harmônicos são os que se seguem:

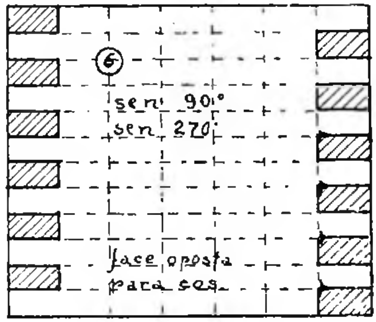












O uso apropriado dêstes anteparos sôbre os quadro *"a.cos"* e *"b.sen"* fornece, em cada fila, os dois têrmos do harmônico correspondente à fila e, assim, se considerarmos tôdas as filas teremos as ordenadas de todos os harmônicos em valôr absoluto. A sua somatória fornece a ordenada da curva em relação ao seu valôr mèdio, a constante a_0.

A única consideração a fazer ainda é a relativa aos sinais. De fato, as constantes *a* e *b* têm os mesmos sinais em tôdas as operações, porem os sinais dos *cosenos* e *senos* variam com os ângulos, de modo que é necessário achar um modo fácil e prático para as várias combinações que ocorrem, pois o tempo de trabalho será bastante diminuido, bem como as possibilidades de erro.

Para cada ponto de subdivisão da curva (de 15° em 15°) devemos organisar um quadro no qual possamos calcular as ordenadas de todos os hrmônicos, bem como a da curva. E' evidente que êstes quadros correspondentes a ângulos indicados pelo mesmo anteparo serão preenchidos simultaneamente com os valores absolutos idênticos retirados do *"a.cos"* e *"b.sen"*, aplicando-se o anteparo uma vez apenas em cada quadro.

A disposição dos *"Quadros de Ordenadas"*, que adotamos consta de 9 colunas nas quais temos; da esquerda para a direita: número de ordem do hamônico; sinal da constante *a;* sinal do *cos;* produtos *a.cos*; sinal da constante *b;* sinal do *sen;* produtos *b.sen;* ordenadas individuais dos harmônicos, e a última coluna destinada às anotações necessárias, bem como para as verificações da ordenada da curva.

Mostramos a seguir os quadros correspondentes a x=150° e x=210°, ou seja às ordenadas de todos os harmônicos e da curva no 10° e 14° intervalos.

	a	s°	a cos	b	s°	b. sen	y	
1	-	-	12,16	+	+	8,56	20,72	
2	-	+	- 2,23	+	-	- 14,84	-17,07	x=150
3	-		——	-	+	- 7,32	- 7,32	
4	+	-	- 1,88	-	-	3,19	1,31	a_0=44,22
5	+	+	1,78	+	+	0,54	2,32	Σy = -0,36
6	-	-	0,46	+		——	0,46	y_{10}=43,86
7	-	+	- 0,72	+	-	- 0,04	- 0,76	
8	-	-	0,025	-	+	- 0,51	- 0,485	
9	+		——	-	-	0,27	0,27	
10	+	+	0,25	+	+	0,22	0,47	
11	-	-	0,07	+	-	-0,205	- 0,135	
12	-	+	- 0,14				- 0,140	
						Σy = - 0,36		

	a	s°	a.cos	b	s°	b.sen	y	
1	-	-	12,16	+	-	- 8,56	3,60	
2	-	+	- 2,23	+	+	14,84	12,61	x=210°
3	-		——	-	-	7,32	7,32	
4	+	-	- 1,88	-	+	- 3,19	-5,07	a_0=44,22
5	+	+	1,78	+	-	-0,54	1,24	Σy=19,91
6	-	-	0,46	+		——	0,46	y_{14}=64,13
7	-	+	-0,72	+	+	0,04	-0,68	
8	-	-	0,025	-	-	0,51	0,535	
9	+		——	-	+	-0,27	- 0,27	
10	+	+	0,25	+	-	-0,22	0,03	
11	-	-	0,07	+	+	0,205	0,275	
12	-	+	- 0,14				- 0,14	
						Σy = 19,91		

Como se pode verificar dos mesmos os valores absolutos dos produtos "*a.cos*" e "*b.sen*" são iguais e foram obtidos pela aplicação do anteparo n° 2 sôbre os quadros citados inicialmente.

Na coluna dos *y*, encontramos na linha correspondente ao harmônico o valor de sua ordenada, por exemplo:

Para x = 150°, a ordenada do 3° harmônico é igual a - 7,32.

Devemos notar que os valores das ordenadas contidos nestes quadros estão referido á constante que, como dissemos, representa o valôr medio da curva sob análise.

Afim de não alongarmos demasiado o trabalho tipográfico, deixamos de incluir no presente os demais quadros de ordenadas que calculamos, pois, com os dois do exemplo, todo o processo fica elucidado.

Concluidos todos os quadro das ordenadas, possuimos os elementos que permitem o traçado e todos os harmônicos da curva.

O seu traçado não necessita maiores explicações bastando apenas tomar como abcissas os valores da variavel *x*, com intervalos de 15°, e como ordenadas de cada harmônico os valores dos quadros marcados a partir da constante (no caso igual a 44,22). Êste traçado preferivelmente será feito na mesma escala em que foi desenhada a curva, para facilitar as comparações por superposição.

QUADRO FINAL

$x =$	0º	15º	30º	45º	60º	75º	90º	105º	120º	135º	150º	165º
1	-14,04	- 9,13	- 3,60	2,27	7,80	12,90	17,12	20,18	21,84	22,03	20,72	17,99
2	- 4,47	4,71	12,61	17,14	17,07	12,43	4,47	- 4,71	-12,61	-17,14	-17,07	-12,43
3	- 6,63	- 9,86	- 7,32	- 0,48	6,63	9,86	7,32	0,48	- 6,63	- 9,86	- 7,32	- 0,48
4	2,76	- 1,31	- 5,07	- 2,76	1,31	5,07	2,76	- 1,31	- 5,07	- 2,76	1,31	5,07
5	2,06	1,57	- 1,24	- 2,22	0,10	2,27	1,08	- 0,61	- 1,96	0,70	2,32	0,51
6	- 0,46	1,39	0,46	- 1,39	- 0,46	1,39	0,46	- 1,39	- 0,46	1,39	0,46	- 1,39
7	- 0,83	0,14	0,68	- 0,65	- 0,35	0,82	- 0,08	- 0,78	0,49	0,53	- 0,76	- 0,14
8	- 0,05	- 0249	0,53	- 0,05	- 0,49	0,53	- 0,05	- 0,49	0,53	-0,05	- 0,49	0,53
9	0,18	0,06	0,27	0,32	- 0,18	0,32	- 0,27	0,06	0,18	- 0,32	0,27	- 0,06
10	0,50	- 0,30	0,03	0,26	- 0,47	0,56	- 0,50	0,30	- 0,03	- 0,26	0,47	- 0,56
11	- 0,08	0,18	- 0,28	0,23	- 0,39	0,42	- 0,41	0,38	- 0,31	- 0,39	- 0,13	0,03
12	- 0,14	0,14	- 0,14	0,14	- 0,14	0,14	- 0,14	0,14	- 0,14	0,14	- 0,14	0,14
$\sum_1^{12} =$	-21,20	-12,90	- 3,07	12,81	30,43	46,72	31,76	12,25	- 4,17	9,73	- 0,36	9,21

$x =$	180º	195º	210º	225º	240º	255º	270º	285º	300º	315º	330º	345º
1	14,04	9,03	3,60	- 2,17	- 7,80	-12,90	-17,12	-20,18	-21,84	-22,03	-20,72	-17,99
2	- 4,47	4,71	12,61	17,14	17,07	12,43	4,47	- 4,71	-12,61	-17,14	-17,07	-12,43
3	6,63	9,86	7,32	0,48	- 6,63	- 9,86	- 7,32	- 0,48	6,63	9,86	7,32	0,48
4	2,76	- 1,31	- 5,07	- 2,76	1,31	5,07	2,76	- 1,31	- 5,07	- 2,76	1,31	5,07
5	- 2,06	- 1,57	1,24	2,22	- 0,10	- 2,27	- 1,08	1,71	1,96	- 0,70	- 2,32	- 0,51
6	- 0,46	1,39	0,46	- 1,39	- 0,46	1,39	0,46	- 1,39	- 0,46	1,39	0,46	- 1,39
7	0,83	- 0,29	- 0,68	0,65	0,34	- 0,82	0,08	0,78	- 0,48	- 0,53	0,76	0,14
8	- 0,05	- 0,48	0,53	- 0,05	- 0,48	0,53	- 0,05	- 0,48	0,53	- 0,05	- 0,48	0,53
9	- 0,18	0,32	- 0,27	0,06	0,18	- 0,32	0,27	- 0,06	- 0,18	0,32	- 0,27	0,06
10	0,50	- 0,30	0,03	0,26	- 0,47	0,56	- 0,50	0,30	- 0,03	- 0,26	0,47	- 0,56
11	0,08	- 0,18	0,27	- 0,35	0,39	- 0,42	0,41	- 0,38	0,31	- 0,23	- 0,13	- 0,03
12	- 0,14	0,14	- 0,14	0,14	- 0,14	0,14	- 0,14	0,14	- 0,14	0,14	- 0,14	0,14
$\sum_1^{12} =$	17,48	21,32	19,90	14,09	3,21	- 6,47	-17,76	-26,06	-31,38	-31,99	-30,81	-26,49

Cada harmônico será representado por uma convenção de linha ou de côr.

Sistematisada a 2ª parte, como mostramos, é facil a obtenção de todos os elementos por via analítica, devendo-se notar, que, na prática, é muito mais fácil operar com vários elementos do que descrever o modo de trabalho. Devemos declarar que, inicialmente, despendiamos cêrca de 20 horas na análise de uma curva qualquer e, depois da sistematisação descrita, o mesmo estudo era feito em 4 horas apenas.

Para concluir daremos aos leitores o *"Quadro final"* da curva analisada, no qual constam, em função da variavel x, todos os valores das ordenadas dos harmônicos e da curva retirados dos *"Quadros de Ordenadas"* e pelo qual os desenhos podem ser executados.

Esperamos ter explicado de modo claro a sistematisação do processo.

Resumindo, obtivemos:

a) as constantes da equação da curva;

b) as amplitudes de todos seus harmônicos;

c) as fases dos mesmos;

d) as ordenadas dos harmônicos e da curva dada, obtidas por via analítica.

Com êstes dados conclui-se a análise; e êstes elementos são utilisados para a interpretação da curva, seus elementos componentes predominantes, etc.

Para aquêles que têm necessidade de aplicar constantemente o processo de análise, todo o material necessário, como sejam os vários quadros, tabelas, devem ser preparados de antemão, de modo que, em cada caso particular, apenas serão preenchidos com os valores retirados da curva, operando-se a seguir.

Publicando o presente artigo, tivemos em mira apenas trazer ao conhecimento dos interessados os resultados a que chegamos em um grande número de estudos feitos em curvas de natureza biológica, resultados que, permitindo uma maior exatidão ao trabalho, têm, ainda, a vantagem de poupar o tempo do pesquisador.

BIBLIOGRAFIA

1) «La mise en equation des resultats d'experiences», Ernest Rufener, Dunod, 1951 Obras consultadas:

«Manual del constructor de maquinas». Dubbel, segunda edição, Tomo 1.

«Calculo Diferencial e Integral». Courant.

«Manual do Engenheiro», Edição Globo.

«Matemática Superior para Engenheiros e Físicos», Sokolnikoff. alem de outras.