

I PARTE

COLABORAÇÃO

PERSPECTIVA DOS TRONCOS DAS PIRÂMIDES E DOS CONES

PROF. RAYMUNDO AGUIAR

Catedrático de «Sombras, Perspectiva e Estereotomia»

A perspectiva frontal dos troncos das pirâmides, bem como a perspectiva dos troncos dos cones, pertencendo à parte do programa que trata da perspectiva dos sólidos, é, incontestavelmente, um caso simples de resolver. Essa a razão por que jamais pensámos em dar publicidade a um processo para sua solução, talvez por nós achado — uma vez não encontrado nos livros que tratam do assunto.

O "Tratado Metódico de Perspectiva", de Esteban Quaintenne, reconhecidamente dos melhores compêndios sôbre a matéria, traz, às páginas 229, 230, 236 e 237, alguns exemplos, quer do tronco do cone, quer do tronco da pirâmide reta quadrangular. Em qualquer dos casos, porém, os dados que aparecem são:

- a) na pirâmide — a aresta da base, a aresta da parte truncada e a altura do tronco;
- b) no cone — o raio da base, o raio da parte truncada e a altura do tronco.

Não sabe, portanto, o estudante como resolver o problema, quando lhe fôrem dados apenas o raio ou a aresta da base e as alturas do cone ou da pirâmide e dos respectivos troncos.

Nisso baseados e, o que é mais, atendendo a pedido do Prof. Américo Simas F^o, que muito nos merece, apresentamos êsse processo, dedicando-o aos estudantes da matéria, àquêles que, sabendo menos, necessitam de orientação.

Guardo a esperança de que tal coisa lhes possa aproveitar.

* * *

Digamos que se pretende achar a perspectiva paralela ou frontal de um tronco de pirâmide reta quadrangular, assente

pontos B e D , estas dar-nos-ão em A e C os dois procurados vértices e, portanto a base da pirâmide $ABCD$.

Determinada esta base, traça-se a diagonal AC , a qual, ao cortar a concorrente m $B D$ ao Ponto de Distância, nos dará em r o centro da base, ponto êste por onde levantaremos uma perpendicular à Linha de Terra, que virá a ser o eixo da figura.

Para achar o vértice da pirâmide, levanta-se por m — ponto de partida da concorrente ao Ponto de Distância — uma vertical, que será a Escala das Alturas, marcada em m O a altura da pirâmide e em m n a altura do tronco, cuja perspectiva se quer achar.

Em se tirando por O uma segunda concorrente ao Ponto de Distância, teremos em V , ao cortar o eixo traçado a partir de r , o vértice da pirâmide em perspectiva.

A nossa pretensão é, todavia, achar o tronco, e não a pirâmide.

Nêste caso, depois de traçadas, em linhas interrompidas, as arestas VA , VB , VC e VD pelo n — altura do tronco da pirâmide marcada na Escala das Alturas —, tira-se uma terceira concorrente ao Ponto de Distância. Onde cortar as arestas BV e DV , aí teremos os vértices da parte truncada B' e D' , bastando, por, êsses dois pontos, tirar paralelas à Linha de Terra, para têmos em A' e C' os vértices que faltavam para determinar a perspectiva pedida do tronco de pirâmide.

Digamos ainda que se pretende achar a perspectiva dêsse tronco de pirâmide, porém em posição invertida.

* * *

O processo será semelhante:

Marca-se, da mesma forma, em a b , na Linha de Terra (fig. 2), a dimensão dada para a aresta da base e, em b m , o afastamento. De a e b , tiram-se concorrentes ao Ponto Principal e, de m , uma outra ao Ponto de Distância, achando-se então os pontos d' e b' , de onde, por meio de paralelas (igualmente em linhas interrompidas), teremos os pontos a' e c' , que nos darão a perspectiva de um quadrado, quadrado êsse que será a projeção da base da pirâmide sôbre o Plano Pers-

V será, pois, o vértice da pirâmide, cujo tronco está invertido. Traçadas as quatro arestas $AV - BV - CV - DV$ e a outra diagonal $a' - c'$, no quadrilátero formado pela projeção da base no Plano Perspectivo, teremos, nos cruzamentos das diagonais com as arestas, os pontos $A'-B'-C'-D'$, que determinarão a parte truncada da pirâmide. Isto feito, é só traçar as arestas visíveis e as ocultas: aí estará desenhada a perspectiva pedida.

* * *

PERSPECTIVA DE UM TRONCO DE CONE, ASSENTE PELA BASE SÔBRE O PLANO GEOMETRAL (fig. 3)

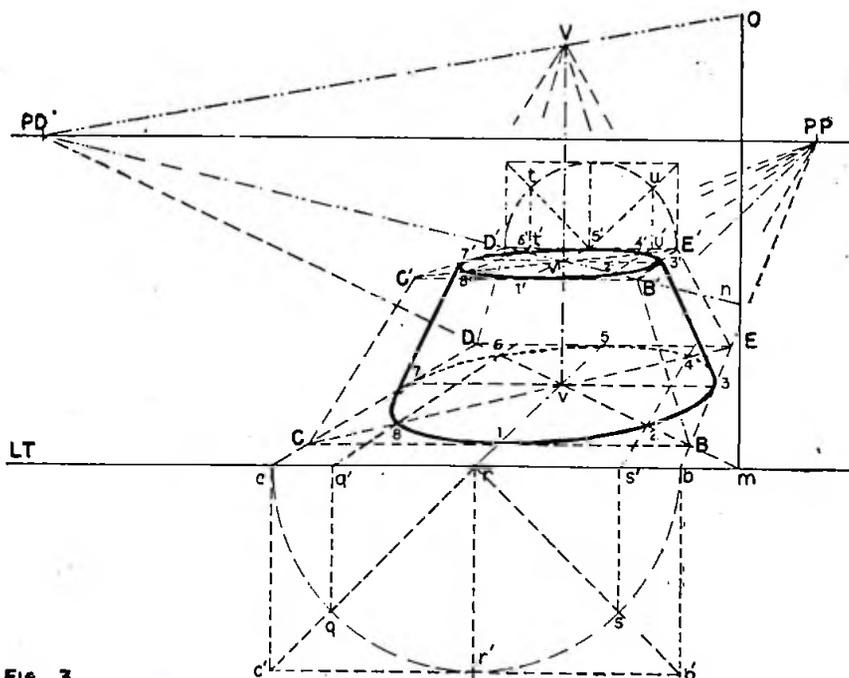


FIG. 3

Admitamos que br é o raio dado para a base do cone. Marca-se essa dimensão da Linha de Terra e, fazendo centro em r , traça-se uma semicircunferência, que nos irá dar o

ponto c , sendo, portanto, $b c$ o diâmetro da base do cone, assente sôbre o Plano Geometral.

Dêsses dois pontos, b e c , tiram-se concorrentes ao Ponto Principal e , marcando para o lado oposto ao Ponto de Distância o afastamento dado ($b m$), traça-se, por êste último ponto m , uma outra ao Ponto de Distância, a qual, ao cortar as primeiras, determinará os pontos B e D — primeiros vértices do quadrado que irá circunscrever a base do cone.

Em se traçando paralelas por êsses dois vértices à Linha de Terra, teremos nós os pontos C e E , que fecharão o quadrilátero onde iremos encontrar a perspectiva do círculo. E ligando êsses dois pontos por uma reta, acharemos o ponto v no cruzamento das duas diagonais, centro da base do cone, por onde teremos que levantar o eixo da figura.

Por êste último ponto v , traça-se uma concorrente ao Ponto Principal. Esta, ao cortar os segmentos BC e DE , dar-nos-á os pontos 1 e 5, que já fazem parte da curva. Ainda pelo ponto v , cruzamento das duas diagonais e centro da base, tira-se uma paralela à Linha de Terra, a qual, ao atingir os lados BE e CD , marcará os pontos 3 e 7, também pertencentes à curva.

Temos nós, assim, os quatro pontos ímpares, dos oito precisos ao traçado da base do cone em perspectiva. Vamos agora tratar dos pares.

No Plano Geometral, onde já foi traçada uma semicircunferência de raio igual ao da referida base, tiram-se raios a 45° com a Linha de Terra, a partir do ponto r — centro dêsse arco.

Êsses raios a 45° podem ser traçados de várias formas: por meio do transferidor, por meio de um esquadro de igual ângulo, ou com o auxílio do compasso.

Achadas as bissetrizes dos ângulos c, r, r' e b, r, r' , ou, ainda, construindo o retângulo c, c', b, b' , de lados iguais ao diâmetro e ao raio da base do cone, e traçando-se as semidiagonais c', q, r e b', s, r do quadrado que circunscreveria a referida base, formarão êles — é claro — ângulos de 45° com a Linha de Terra.

Esses raios, ao atingirem a semicircunferência, nos darão os pontos q e s , que, projetados sôbre a Linha de Terra, vão estabelecer os pontos q' e s' , os quais, por sua vez, concorrendo ao Ponto Principal, determinarão os tais pontos pares: 2, 4, 6 e 8, ao cortarem as diagonais do quadrilátero $BCDE$.

Ligados os oito pontos achados por uma linha curva, teremos nós uma elipse, que será a perspectiva da base do cone, cujo tronco se quer achar.

Vamos agora traçar o cone.

Pelo ponto m na Linha de Terra suspende-se uma vertical, que será a Escala das Alturas. E, a partir de m , marca-se em $m O$ a altura do cone e em $m n$ a altura do tronco. Por êsses dois pontos (O e n), tiram-se concorrentes ao Ponto de Distância, a primeira das quais, ou seja a que parte de O , ao cortar o eixo que se suspendeu a partir de v , irá determinar em V o vértice do cone.

Para encontrar-se a parte truncada, liga-se o vértice achado aos pontos B e D , por onde passa a concorrente inferior da Escala das Alturas, achando-se em $B' D'$ — na concorrente média da mesma Escala, que parte do ponto n — os primeiros vértices do quadrado em perspectiva a circunscrever a parte seccionada.

Liga-se o vértice V aos pontos C e E e, tirando-se paralelas à Linha de Terra pelos B' e D' , teremos nós em C' e E' os dois vértices procurados. Em se ligando os quatro pontos B' , C' , D' , E' e traçando-se as diagonais $B' D'$ e $C' E'$, teremos então em V' o centro da parte truncada, por onde se fará passar uma concorrente ao Ponto Principal, a qual nos dará os pontos $1'$ e $5'$, que pertencerão à curva. Pelo mesmo ponto V' tira-se uma paralela à Linha de Terra, obtendo-se, por êsse meio, os pontos $3'$ e $7'$.

Faltam-nos os pontos pares.

Com centro no ponto $5'$ e uma abertura igual a $5' D'$ — por sua vez igual a $5' E'$ —, traça-se uma semicircunferência, a qual, por meio de raios a 45° , conforme fizemos no Geometral, nos dará os pontos t e u . Projetados perpendicularmente ao lado $D' E'$, determinarão os pontos t' e u' , pelos quais,

traçando-se concorrentes ao Ponto Principal, obteremos os pontos 2', 4', 6' e 8'.

Estão completos os oito pontos precisos para o traçado da elipse, que é a perspectiva do círculo da parte truncada.

Pelo ponto V , vértice do cone, tirando tangentes comuns às duas elipses, teremos nós as geratrizes que completam a perspectiva pedida.

* * *

PERSPECTIVA DO TRONCO DE CONE INVERTIDO

(fig. 4)

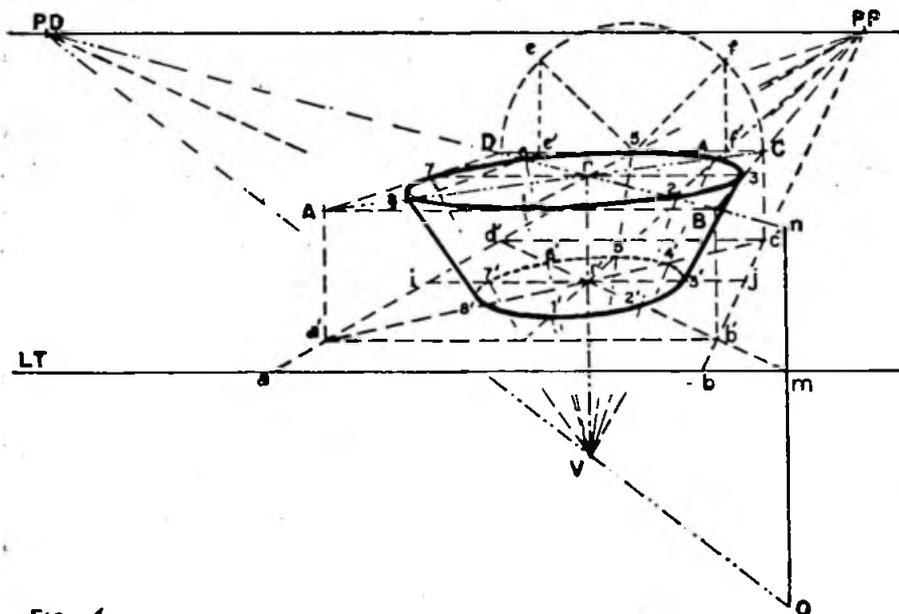


Fig. 4

Marcada em $a b$, na Linha de Terra, a dimensão dada para diâmetro da base do tronco de cone e, em $b m$, o afastamento dado, tiram-se de a e b concorrentes ao Ponto Principal e, de m , uma outra ao Ponto de Distância. Nos seus cruzamentos determinam elas os pontos b' e d' , por onde se tiram paralelas para fixar os pontos a' e c' , vértices da projeção do quadrado que circunscreve a base do cone.

Como se fez com o tronco de pirâmide invertido, traça-se pelo ponto m uma perpendicular à Linha de Terra, a qual será a Escala das Alturas, marcando-se nela, de m a n , a altura do tronco e, de n a O , a altura do cone.

Por n , tira-se uma concorrente ao Ponto de Distância e, por b' e d' verticais. Ao cortarem aquela, estas determinarão os pontos B e D , por onde, traçando paralelas à Linha de Terra e concorrentes ao Ponto Principal, teremos — no encontro com as verticais partidas dos pontos a' e c' — os vértices A e C do quadrado que circunscribe a base do tronco de cone, cuja perspectiva se pretende achar.

Traçada a diagonal AC , esta, ao cortar a concorrente nBD ao Ponto de Distância, determinará em r o centro da circunferência em perspectiva. E, passando por êle uma concorrente ao Ponto Principal, teremos os primeiros pontos 1 e 5 da perspectiva do círculo. Pelo mesmo ponto r , centro da figura, tira-se uma paralela à Linha de Terra, a qual, ao cortar as arestas AD e BC , determinará os pontos 3 e 7, também pertencentes à perspectiva do círculo.

Eis, dêsse modo, os pontos ímpares para poder traçar a curva. Faltam-nos os pares.

Para isso, fazendo centro no ponto 5, meio do segmento CD , traça-se uma semicircunferência e, por um dos processos ensinados, do mesmo ponto 5, linhas a 45° com a horizontal CD . Essas linhas nos darão os pontos e e f , por onde, baixando perpendiculares à Linha de Terra, encontraremos os pontos e' e f' no lado CD do quadrilátero. Por êsses dois pontos fazem-se passar concorrentes ao Ponto Principal, que nos darão os pontos pares: 2, 4, 6 e 8, ao cortarem as diagonais AC e BD .

Achados, finalmente, os oito pontos, faz-se passar a curva que representará a base do cone em perspectiva.

Determinemos agora a parte truncada.

Pelo ponto O , na Escala das Alturas, traça-se uma concorrente ao Ponto de Distância. Ao interceptar o eixo do cone, ou seja a vertical baixada do ponto r , marcará ela o vértice V .

naquela primeira Linha, a dimensão dada para aresta da base da pirâmide. Por êsses dois pontos tiram-se perpendiculares à mesma Linha de Terra, marca-se em a' e b' o afastamento dado e traça-se a primeira aresta da base no Geometral.

Com abertura igual a essa dimensão e fazendo centro nêsses dois pontos, traçam-se dois arcos, que se cortam em o' — centro da circunferência que circunscreverá o hexágono no Geometral. Ainda com centro em o' e com a mesma abertura, traça-se um arco de círculo, cujo tamanho será marcado por uma paralela à Linha de Terra, traçada pelo ponto o' e que nos dará os pontos c' e d' . Ligando-se os pontos c' a a' e b' a d' , temos nós, no Geometral, a metade da base da pirâmide em verdadeira grandeza, cuja perspectiva se pretende achar.

Projetados os pontos c' e d' sôbre a Linha de Terra, tiram-se, não só pelas projeções c e d , como também pelos pontos a e b , concorrentes ao Ponto Principal. Depois, fazendo centro em b e em d , rebatem-se os pontos b' e d' sôbre a Linha de Terra, para o lado oposto ao Ponto de Distância, em b'' e d'' . Êstes pontos, concorrendo a PD , determinarão, ao cortar as respectivas concorrentes ao Principal, os pontos B e D — primeiros vértices da base do tronco de pirâmide em perspectiva.

Por êstes pontos B e D traçam-se paralelas à Linha de Terra, as quais, ao cortarem as concorrentes de a e c ao Ponto Principal, determinarão, em A e C , mais dois vértices do hexágono em perspectiva. Projeta-se o ponto o' em o na Linha de Terra. E de o , tirando uma concorrente ao Ponto Principal, teremos em O o centro da base da pirâmide — ponto de partida do eixo que, mais tarde, irá determinar o vértice.

Para acharmos os pontos E e F , últimos vértices da base da pirâmide, poderemos empregar dois processos:

- 1º. — Ligam-se os pontos A e B ao ponto O — centro da base da pirâmide — e prolongam-se as retas, diagonais portanto dessa base, até atingirem as concorrentes ao Ponto Principal, que, partidas de

a e b , nos deram os pontos A e B — vértices do hexágono. A intersecção das diagonais com as concorrentes determinará os pontos E e F — últimos vértices do hexágono.

- 2.º — Prolonga-se a aresta AC até atingir o Ponto Acidental n. 1 (PA1) na Linha do Horizonte. E, como êste será o ponto de fuga de todas as paralelas a essa aresta, faz-se concorrer para êle (PA1) uma reta, a partir de D , determinando em F o quinto vértice do hexágono. Uma paralela à Linha de Terra, passando por êste último ponto, será a segunda aresta frontal do hexágono, determinando em E o último vértice da base.

Para achar as alturas da pirâmide e do tronco, levanta-se por c uma perpendicular à Linha de Terra, que será a Escala das Alturas: marcando-se nela a altura dada para o tronco, em $c m$, e a altura da pirâmide, em $c n$.

Por êstes dois pontos tiram-se concorrentes ao Principal e, suspendendo por C — vértice do hexágono que toca na concorrente inferior da Escala das Alturas —, uma vertical até n' , na concorrente superior que parte de n , e, por aquêlê ponto n' , uma paralela à Linha de Terra, até encontrar o eixo da pirâmide, suspenso verticalmente de O , teremos em V o vértice da pirâmide em perspectiva, o qual se liga aos pontos A , B , C , D , E e F , formando as arestas laterais da mesma.

Falta agora achar a perspectiva do tronco.

Pelo ponto m' — cruzamento da vertical $C n'$ com a concorrente média da Escala das Alturas (mPP) — tira-se uma paralela à Linha de Terra, a qual, ao interceptar as arestas CV e DV , nos dará os pontos C' e D' — vértices da parte truncada. Por concorrentes dêstes dois pontos (C' e D') a PA1, na Linha do Horizonte, teremos os pontos A' e F' , onde as duas concorrentes cörtarem as arestas AV e FV . Pelos pontos achados, tiram-se paralelas à Linha de Terra, e elas determinarão os pontos B' e E' , ao atingirem as arestas BV e EV .

que, cortando a paralela à Linha de Terra, traçada pelo mesmo centro o , irá determinar os dois vértices c'' e d'' do hexágono, a representar a projeção da base da pirâmide no Geometral.

Projetados êstes dois últimos pontos na Linha de Terra, em c e d , tiram-se pelos quatro a , b , c , e d concorrentes ao Ponto Principal. E, fazendo centro em b e em d , rebatendo b'' e d'' em b''' e d''' faz-se concorrer ao Ponto de Distância os dois achados, determinando-se $b'ed'$ na intersecção das duas concorrentes ao Ponto de Distância com as de b e d ao Principal. Delas, como no caso anterior, tiram-se paralelas à Linha de Terra, dando-nos os pontos a' e c' no cruzamento com as concorrentes de a e c ao Ponto Principal.

Traçadas as projeções $d'b'$, $b'a'$ e $a'c'$ das arestas BD , BA e AC , no plano Perspectivo, prolonga-se a reta $a'c'$ até alcançar a Linha de Horizonte, fixando-se aí, em PAI , o ponto de Fuga Acidental, para onde concorrerão todas as paralelas àquela reta e que servirá, portanto, para acharmos o ponto f' , por meio de uma sua concorrente (dêle), partindo de d' , visto ser a aresta $d'f'$ paralela a $a'c'$.

Estabelecido o ponto f' , na concorrente de b' a PP , por êle tira-se uma paralela à Linha de Terra, que, cortando a concorrente de a' ao Ponto Principal, determinará o ponto e' , último necessário para o traçado da projeção da base da pirâmide sôbre o Plano Perspectivo.

Delimitado o polígono a' , b' , c' , d' , e' , e f' , levantam-se por êsses vértices, perpendiculares à Linha de Terra. E, marcando, a partir de c , a Escala das Alturas, por meio de uma perpendicular à Linha de Terra, fixa-se em $c m$ a altura do tronco e em $n m$ a da pirâmide, tirando-se, por êsses dois pontos, as concorrentes externas da Escala das Alturas: aqui, como no caso anterior, em direção ao Ponto Principal.

Onde a concorrente superior, ou seja a que parte do ponto m , cortar a vertical levantada do ponto c' , que se encontra na concorrente média da aludida Escala, aí estará o ponto O — primeiro vértice da base procurada.

Uma paralela por êle traçada à Linha de Terra, far-nos-á encontrar o ponto D na vertical que se suspendeu de d' .

Dos achados pontos C e D , tirando-se concorrentes ao Ponto Acidental $PA1$, teremos nós, nas suas intersecções (de-las) com as duas verticais levantadas de a' e f' , mais dois vértices da base dos pontos A e F .

Para acharmos os dois outros pontos, basta somente, portanto, tirar paralelas à Linha de Terra pelos últimos A e F e, ao encontrarem-se elas com as verticais traçadas de b' e e' , determinarão os pontos B e E — últimos vértices da base da pirâmide em perspectiva.

Traçado o polígono, tratemos do vértice.

Já temos a concorrente inferior da Escala das Alturas, que parte do ponto n . Em se prolongando, portanto, a vertical $C c'$ até atingi-la, encontraremos o ponto c'' , de onde, tirando-se uma paralela à Linha de Terra, até alcançar o eixo da pirâmide — baixado verticalmente de v' , ponto êste determinado pelo cruzamento das diagonais do polígono no Plano Perspectivo —, iremos obter o ponto V , vértice da pirâmide.

Estamos, pois, com todos os elementos para traçar a perspectiva pedida: é só, dos vértices da base ($A-B-C-D-E-F$), traçar as arestas laterais em direção ao vértice V . E estas, ao cortarem as diagonais da projeção da base da pirâmide no Plano Perspectivo, determinarão os pontos $A'-B'-C'-E'-F'$ — vértices da parte truncada que está assente sôbre O' o referido Plano.

Traçadas estas arestas, por linhas cheias e pontuadas, sejam elas visíveis ou ocultas, terminada ficará a perspectiva do tronco de pirâmide reta hexagonal invertido.

* * *

Eis que vos dedico, caros alunos, estas despreziosas linhas, transcrevendo, à guisa de remate, citações de dois grandes artistas:

Leonardo Da Vinci, o extraordinário mestre da Renascença, definiu a perspectiva como “a primeira coisa que um jovem artista deve aprender”.

E Francisco Arola Sala — arquiteto e cenógrafo contemporâneo —, no seu tratado sobre o assunto, sentenciou: “A perspectiva é a *gramática* da Arte, é a *anatomia* da linha; é a ciência mágica que faz surgir do nada as grandes composições arquitetônicas; é a grande auxiliar do arquiteto e do artista, graças a cujas regras se torna possível reduzir a formas gráficas as idéias mais atrevidas e inverossímeis”.