AULA INAUGURAL

EVOLUÇÃO DO PENSAMENTO MATEMATICO. FILOSOFIA DA MATEMATICA

Prof. ARISTIDES DA SILVA GOMES
Catedrático de Geometria Descritiva

Permiti, meus senhores, que vos entretenha, nesta aula, falando da Matemática.

Não é meu desejo enveredar, passo a passo, pela sua técnica árdua, que só é accessível aos especialistas, antes é minha intenção abordar, de relance, a sua história amena, que é a própria história do espírito humano.

Não é temeridade afirmar que a História da Matemática começa com a História da Civilização.

As transações comerciais entre indivíduos e entre povos diferentes, consequências inevitáveis do consórcio humano e, por outro lado, a aspiração de submeter à medida o universo dos fenômenos, de que o mundo é teatro e o gênero humano expectador, na secreta esperança de determinar o seu mecanismo e descobrir as suas fôrças motrizes, conduziram, com um irresistível imperativo categórico, o homem, mal saído do estado de barbaria, a forjar tanto uma infantil aritmética quanto uma embrionária geometria.

Em dado momento da sua evolução, sentiu o homem a necessidade premente de contar coleções de objetos, com que lidava na sua vida quotidiana.

Da prática da contagem através dos séculos, como resultado de um lento porém poderoso esfôrço de abstração, surgiram os números naturais, que constituem uma das noções mais simples e mais antigas, conquistadas pela humanidade, mas também uma das que apresentam maior dificuldade de reconstruir a gênese e determinar a natureza.

Os números naturais são uma sublime criação do espírito humano, tão sublime que Kronecker, eminente matemático alemão do século XIX, a atribuiu a Deus, afirmando confiadamente: "Deus fêz os números naturais; todo o resto é obra do homem".

Se Kronecker considerou os números naturais como de origem divina, alguns dos mais sagazes matemáticos do século XX inclinaram-se a considerá-los como a rêde mais eficaz, que o diabo já inventou para apanhar os homens confiados.

Como quer que seja, obra de Deus ou arte do Diabo, os números naturais constituem hoje o conceito fundamental não só da Aritmética, a rainha das Matemáticas, mas também de tôda a Matemática, a rainha das Ciências.

Como produto da necessidade de demarcar os limites de propriedades, cada ano destruídos pelo Nilo, nasceu a Geometria, a cujo estudo dedicavam os sacerdotes egípcios, os guardiães da Ciência, nada menos de vinte e dois anos.

Do desenvolvimento da geometria entre os egipcios dão-nos notícia as pinturas, que, tendo resistido as intempéries, se podem ainda admirar nas paredes dos templos, dos túmulos e de outros insignes monumentos e que mostram que, na sua mente, haviam cintilado alguns princípios da perspectiva, que permaneceram de todo ignorados dos povos do Extremo Oriente.

O uso que fizeram da "planta" e do "alçado" de um edifício, está a provar que êles superaram os Babilônios e que precederam Vitrúvio, o sumo arquiteto romano da era imperial, no emprêgo desta forma primitiva do método da dupla projeção ortogonal, que é um dos métodos fundamentais da Geometria Descritiva moderna.

O documento, que compreendia os conhecimentos dos egípcios sôbre a Aritmética, é o "papiro" Rhind", cujo texto e tradução foram publicados por Eisenlokr em 1877 e que dataria de cêrca de dezessete séculos antes da nossa era. Ali existem engenhosos problemas, cujas soluções constituem prescrições utilitárias e receitas técnicas, que interessavam ao astrólogo e ao engenheiro, porém não alcançavam a ciência pròpriamente dita, a Aritmética.

Todavia, se atentarmos que os egípcios manejavam frações complicadas e se pensarmos nas dificuldades, que a interpretação dos números racionais provocou em pleno século XIX evocaremos o que conviria chamar a "préalgebra", onde as soluções para os difíceis problemas da Aritmética são obtidas sem nenhuma justificativa de ordem lógica, mas donde devia sair a Algebra, esta Aritmética universal, que em, segundo a famosa observação de Newton, "o número é menos uma coleção de unidades do que uma relação abstrata de uma quantidade qualquer para outra da mesma espécie, que se considera como unidade".

Assim, a aparência pragmática do cálculo egípcio põe a descoberto as molas verdadeiramente intelectuais do pensamento matemático e manifesta, com uma espécie de profundidade inconsciente, tôda a fecundidade, de que a ciência dos números se mostrará capaz.

Sem nos demorarmos em excursão pelo Oriente, mau grado os atrativos da Mesopotâmia, essa vasta planície que, segundo o Antigo Testamento, foi séde do Paraíso Terrestre, passemos à Grécia imortal, a cujo povo estava reservada a glória imperecedora de tornar um fim em si mesma a pesquisa científica em geral, e em particular a indagação matemática, e de demonstrar que, sòmente, assim, ela pode chegar às mais sublimes alturas, a que à mente humana é dado atingir.

A primeira personalidade eminente, que nos apresenta a História das Ciências na antiga Grécia, é Tales de Mileto, um dos fundadores da célebre Escola Jônica.

Narram os historiadores que, do fim do século VI para o começo do século V, os exércitos da Média e da Lídia se enfrentavam, prontos para a pugna que devia decidir da sorte da Ásia Menor, quando eis que o sol se escurece e as fileiras inimigas, obedientes ao preceito, constantemente observados pelas estirpes iranianas, de não combater senão à luz do dia, depõem as armas e entram em acôrdo. Os escritores do tempo são unânimes em admitir que êstes impressionantes fenômenos tinham sido predito por Tales e tanta admiração produziu, nos seus conterrâneos esta predição que Tales foi considerado o primeiro dos sete sábios da Grécia.

A ciência, de que dispunha Tales, não era todo fruto de estudos e observações pessoais, já que êle mesmo não hesitava em declarar que muito tinha aprendido no Egito, com cujos sacerdotes tinha estado em contacto, no curso de peregrinações mediterrâneas.

Todavia a Escola Jônica tem direito a um lugar na história das ciências exatas, não por contribuição direta e importantes aos nossos conhecimentos positivos, mas antes por ter voltado a própria atenção para algumas questões geométricas, escapadas, segundo parece, aos Babilônios e aos Egípcios. Portanto, não representa a alvorada da matemática grega porém o período de irrequieta fermentação, que preludia e anuncia a verdadeira e própria pesquisa científica.

A Pitágora de Samos, o fundador da Escola Itálica, coube a glória jamais ofuscada, da fundação da Matemática como um sistema dedutivo e da organização do programa de matematizar os fenômenos naturais.

As aluzões dos antigos às diversas viagens de Pitágoras estão demasiado afastadas das fontes, para terem um valor histórico, parece, todavia, impossível considerar a formação da doutrina pitagórica, sem levar em conta a influência do Egito e principalmente da Ásia. Com efeito, os pensadores jônicos da geração de Tales e de Anaximandro ocuparam-se em um trabalho astronômico, que se vincula diretamente às investigações favoritas dos caldeus, levantaram o mapa do céu em conexão com as divisões zodiacais; estabeleceram o quadro das constelações.

Êste trabalho apresenta um interêsse muito particular. Com efeito, observada à simples vista, uma constelação tem duas características: O número dos astros que a constituem e a figura geométrica que ela desenha no céu. Estas características são dados imutáveis e objetivos; forma-se entre elas uma associação, que se apresenta como uma necessidade natural e que pode servir de base a uma concepção geral do Universo. Encontramos aí, senão a origem, pelo menos a ilustração surpreendente da doutrina pitagôrica. Da mesma maneira que as constelações têm número, tôdas as cousas conhecidas têm um número, por isso que o número é a condição mesma do seu conhecimento.

A fórmula de Filolaus é de uma precisão notável: "E em verdade, tôdas as cousas que se conhecem possuem número, pois nenhuma cousa poderia ser percebida nem conhecida sem êste".

Mas esta fórmula não exprime ainda, segundo tôdas as cousas "possuem" números, senão que tôdas as cousas "São" números.

Dêste modo, pensava Pitágoras poder apreender o Universo sob forma de números inteiros, tendo a ilusão de se achar sôbre os traços do último mistério das cousas, precisamente da maneira mais consentânea com a mentalidade helênica: sob forma de ininterrupta harmonia, de cristalina clareza.

Neste ponto intervém de improviso, para destruir um tão belo sonho, uma potência infernal, gerada exatamente pelas descobertas mais sensacionais; não se podia, de fato imaginar naqueles tempos que precisamente esta indesejada descoberta, que parecia obra de espíritos malígnos, teria mais tarde de abrir caminho a vertiginosos progressos matemáticos. Pretendemos falar da descoberta dos números irracionais.

Para Pitágoras o número irracional veio à luz pela primeira vez, no lugar mais inesperado, lá onde se teria devido prever a máxima regularidade, isto é, no estudo do triângulo retângulo isósceles ou, o que é o mesmo, analizando a diagonal do quadrado. Com efeito, pela aplicação do teorema de Pitágoras, se os catetos são ambos iguais a 1, o quadrado da hipotenusa é igual a dois e a própria hipotenusa é a raiz quadrada de 2.

Pode-se procurar quanto se queira — e isto era conhecido também por Pitágoras — não se achará jamais o número inteiro, nem também um número fracionário, que multiplicado por si mesmo dê exatamente 2.

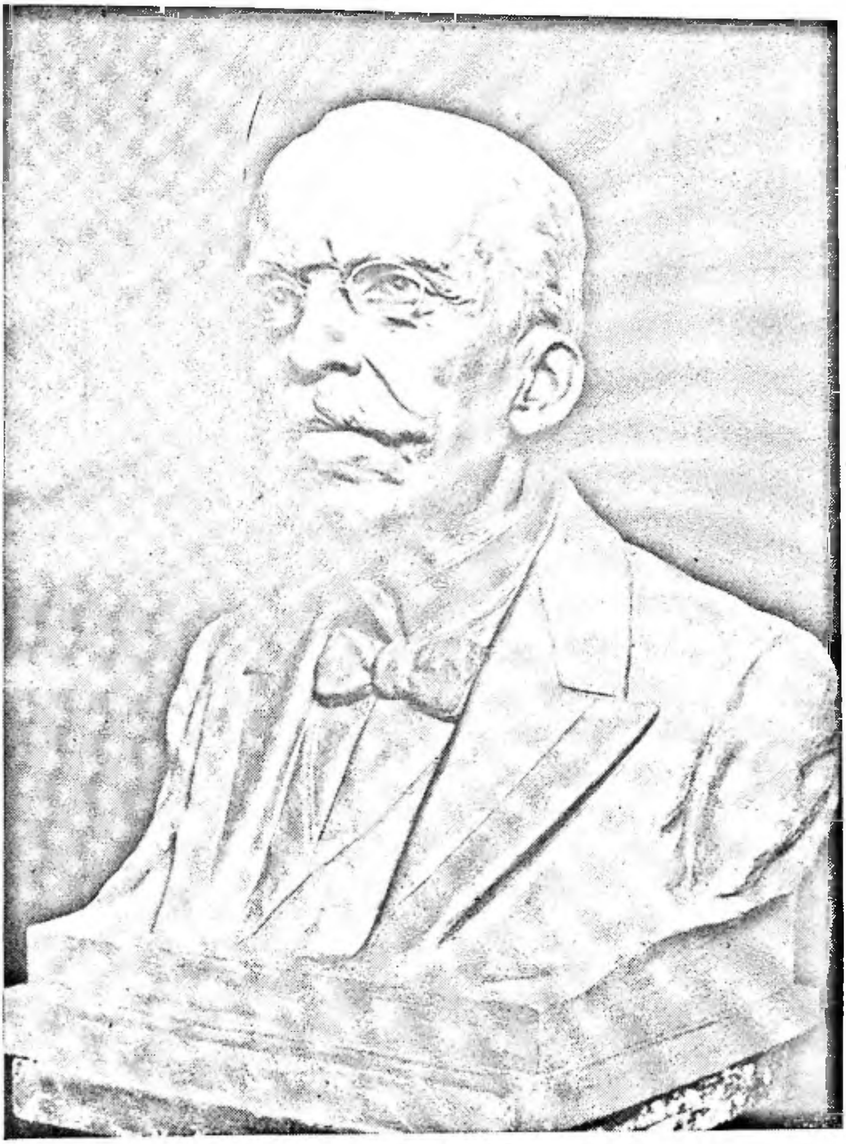
O resultado é "alogos", é inexprimível. Êste e outros números não agrupáveis segundo uma regra são, como diziam os pitagóricos, privados de representação; são no máximo uma imagem, ela também, irracional, da vida, que zomba de qualquer raciocínio, de qualquer faculdade analítica e ordenadora. E, mau grado, isto, a hipotenusa do triângulo retângulo isósceles, a diagonal do quadrado, aí está tão direita, tão completa, como se não distinguissem em nada dos outros segmentos de reta.

O domínio da existência ultrapassa o tipo da inteligibilidade; a ruptura do equilíbrio, em que tinha permanecido o dogmatismo pitagórico, é inevitável. Desta crise existe uma testemunha, Zenon da Eléa.

Se a Escola Itálica, até o dia em que permaneceu qualquer vestígio dela, contribuiu, do modo mais eficaz, para o progresso das ciências exatas, as outras seitas filosóficas, que pulularam na antiga Grécia, contribuíram tôdas, bem que de modos diversos e em medidas diferentes, para o seu aperfeiçoamento.

Assim é que Zenon da Eléa, filiado à escola, que desta cidade toma o nome, ligou o próprio nome a alguns argumentos destinados a demonstrar a impossibilidade da pluralidade ou do movimento, os quais, posto que em realidade paradoxais, serviam para precisar alguns conceitos fundamentais da Matemática.

Como adversário dos Pitagóricos, devia êle, antes de tudo, demolir o objeto mais sagrado desta Escola, o conceito de número. E o atacou a fundo, negando em substância a possibilidade de qualquer pluralidade.



RUI BARBOSA

Prof. Ismael de Barros

Uma pluralidade, raciocinava Zenon, devia ser constituída de unidades. Uma unidade, para ser tal que merecesse êste nome, só podia existir, quando se tratasse de qualquer cousa indivisível; mas uma cousa indivisível não podia ter uma grandeza, de modo contrário seria divisível. Portanto, pois que a unidade não tinha grandeza, era idêntica ao nada e, multiplicando quantas vêzes se queira o nada, não se obtém outra cousa que o nada. Por isto, não existia nenhuma pluralidade.

De maneira análoga pretendia também Zenon provar que igualmente não existia a unidade.

Mas não basta o fato de que não existia nem a unidade nem a pluralidade, isto é, nem grandezas nem números, não existe nem mesmo o movimento.

Antes que uma flecha lançada pelo arco atinja a sua meta, deve percorrer uma metade do caminho, desta metade a metade, e assim por diante. Dado que cada uma destas metades se compõe de trechos realmente existentes do percurso inteiro, ela é a soma de infinitos trechos, sempre mais pequenos porém sempre reais. Então a flecha emprega um tempo infinito em percorrer mesmo o trecho mais pequeno que o ôlho pode perceber, permanece exatamente prêsa à corda do arco!

Por motivos análogos, Aquiles não pode jamais alcançar a tartaruga, se esta tem uma distância de vantagem sôbre êle, porque, enquanto Aquiles percorre esta distância, a tartaruga se avantaja de outros trechos e assim até o fim dos séculos, que nem Aquiles, nem a tartaruga terão a sorte de ver.

Zenon era uma mente demasiado aguda para responder às objeções, de que a flecha em realidade partia, de que a pluralidade existia realmente e de que Aquiles em poucos instantes teria alcançado a tartaruga, com as palavras: "Tanto pior para a realidade".

Êstes paradoxos estabelecidos por Zenon apoiavam-se nas dificuldades, que então apresentavam os conceitos completamente novos de infinitamente pequenos e infinitamente grande, assim como o de continuidade. A crítica dêstes conceitos conduziu à teoria exata da incomensurabilidade e dos números irracionais.

A explicação, dada com o tempo, aos sofismas de Zenon fornece o primeiro exemplo de um fato geral, é que "em matemática não pode haver contradições"; onde se encontra uma, quer dizer que existe uma verdade, cuja descoberta porá fim ao dissídio momentâneo; por isso, "todo paradoxo sugere um problema e impele a resolvê-lo".

O Século V antes de Cristo, quando, depois da derrota dos persas, alcançou a rica e poderosa Atenas, sob o domínio de Péricles, o nível mais elevado da cultura artística, é também o século em que surgiram os três problemas, dos quais, até o século XIX, não se encontrou uma demonstração rigorosa da impossibilidade de resolução, a saber: a quadratura do círculo, a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo.

Os estudos encaminhados para a sua resolução produziram o desenvolvimento da Matemática grega. Quando não se lograva encontrar solução com a régua e o compasso, o que era então o que se entendia pela palavra "elementar", recorria-se a artifícios de índole mais elevada.

Os cientistas da época pre-euclidiana, de que agora vamos ocupar-nos, viveram nos anos que correm entre Socrates e a perda da independência da Grécia. Por mérito do filósofo há pouco citado, o lar da cultura, depois de ter andado errando de terra em terra, fixa por algum tempo a própria séde em Atenas; então a pesquisa da verdade científica se acresceu de uma nova arma potente — o método dedutivo — e a lógica se robusteceu com a constante adoção da determinação exata dos conceitos — princípio da definição; e é digno de relêvo o fato de que êste fecundo princípio ensinado por Sócrates, que da Matemática era medíocre estimador, sòmente por tal disciplina vem fielmente seguido, o que se torna evidente, observando que, em todas as outras, se encontram conceitos imperfeitamente definidos ou completamente não definidos.

Mais direta e visível foi a benéfica influência, exercida sôbre as ciências exatas por Platão, cuja atitude em face das ciências positivas se aproxima maravilhosamente da assumida pelos modernos.

Platão seguiu os ensinamentos de Sócrates e visitou as mais conspicuas localidades mediterrâneas, que gosavam maior fama, isto é, a Magna Grécia e o Egito.

Retornando à pátria, consagrou o melhor de si mesmo em fazer frutificar as sementes colhidas e expor os resultados dos próprios estudos, da cátedra que ocupava no Ginásio da Academia.

Como característica dos ensinamentos de Platão, vai notada a sua grande estimação pela Matemática — Deus geometriza sempre, costumava êle dizer — de que gabava incessantemente a ação educadora e de que recomendava tão calorosamente o estudo que escreveu sôbre a porta da sua escola: "Nenhum ignorante da Geometria entre sob o meu tecto".

Tão significativa legenda desejava eu ver esculpida, ainda em nossos dias, no frontespício de tôdas as escolas, onde se ministra o ensino da Filosofia.

O platonismo é, como o pitagorismo, uma filosofia de tipo matemático. Conforme Aristóteles, a distinção entre o pitagorismo e o platonismo seria puramente verbal. Segundo os pitagóricos, as cousas imitam os números, segundo Platão, as cousas participam dos números; só a palavra teria mudado.

Todavia, afastando-se, ao mesmo tempo, dos pitagôricos, que punham num mesmo plano ciência e filosofia, e de Socrates, em quem a investigação prudente parece deter-se na determinação da hipótese, Platão faz empreender à filosofia matemática um rumo completamente novo.

A Matemática, situada na região do "pensamento", não é mais do que uma ciência intermediária. Sua verdade reside em uma ciência superior que, a respeito da Matemática, está na mesma relação que esta, a respeito da percepção do concreto.

A dialética tem por função retomar as hipóteses das técnicas particulares e conduzí-las até os seus princípios, apodera-se do incondicional e, a partir daí, por um processo que é inverso da análise, forja uma cadeia ininterrupta de idéias que, suspensa do princípio absoluto, constitui um mundo completamente independente do sensível, o mundo da "inteligência".

A filosofia matemática de Platão, no seu mais alto grau e sob a sua forma definitiva, será pois a dialética ou, como se poderia dizer por analogia com a "metafísica", que devia suplantá-la, "a matemática".

Nota-se ainda, como um dos maiores serviços prestados à Matemática por Platão e a sua escola, a introdução, em forma geral, do "método analítico". E' método, que já prestou aos antigos serviços consideráveis, para a demonstração de proporções e a realização de algumas construções geométricas, alcançou o seu triunfo definitivo, quando se começou, nos séculos XVI e XVII, a aplicar à Geometria a Álgebra literal recentemente inventada.

Depois de Platão, cujas admoestações aos discípulos, para se dedicarem à Matemática, de um ponto de vista filosófico e crítico, tinham caído em um terreno bastante fértil, entrou em cena o grande estagirita Aristóteles, aquêle que foi discípulo de Platão e professor de Alexandre Magno e a quem Dante venerava "como mestre dos que sabem".

Aristóteles, criou uma obra prima do pensamento humano cuja forma foi tomada de empréstimo à Matemática, porém foi depois restituída à própria Matemática, como linha diretriz e meio de indagação. Queremos referir-nos à fundação da lógica como ciência, à lógica de cujo nascimento nos parece ouvir ainda hoje o anúncio através dos diálogos de Platão, tão palpitante de vida, tão inebriante no seu devenir.

Pôsto que não tenha produzido nenhum trabalho matemático direto, êste sábio, denominado simplesmente "O Filósofo" na Idade Média, foi ainda o causador indireto de progressos consideráveis, por supor nos seus ouvintes, e posteriormente nos seus leitores, como conhecida a Matemática elementar. Não sòmente estimulou com isto o estudo da Matemática, mas também deu motivo, com seu exemplo, para a realização da nova investigação.

O "organum" universal, que a escola platônica não conseguiu constituir, a Grécia creu encontrar na silogística de Aristóteles; e durante vinte séculos, as primeiras "Analíticas" formarão o modêlo da exposição dedutiva. Por outro lado, as tentativas encetadas em nossos dias, para aproximar as leis da lógica Formal e os princípios da Matemática, têm introduzido, em pleno coração da Filosofia Matemática, a consideração das classes, donde a silogística era originada.

Finalmente, o centro da cultura não se acha mais sôbre o solo da Hélade, mas de novo sôbre as margens do Nilo, em Alexandria, a grande cidade que, depois da dissolução do império de Alexandre Magno, se torna metrópole do reino que coube por sorte a Ptolomeu Sotero.

E precisamente sob o govêrno dêste homem, que a natureza tinha dotado de mente apta a compreender os deveres para com a cultura, é fundado o "Museu de Alexandria", êste instituto "sui gêneris" — universidade, biblioteca, seminário de pesquisas — o qual acolheu, no próprio seio, muitos investigadores eminentes e soube estabelecer e cultivar relações constantes com aquêles que aí não tiveram asilo, êste grande instituto que, durante não menos de nove séculos, se propôs e conseguiu recolher com amoroso cuidado, transmitindo-os às idades futuras, os frutos que a ciência produziu nas terras, em que era falada e compreendida a língua de Homero e de Platão.

O museu de Alexandria é, portanto, o herdeiro direto das grandes escolas que floresceram na Grécia no período precedente, e — pelo menos no que concerne às ciências exatas — assegurou o desenvolvimento regular dos conceitos e dos métodos, germinados na mente dos que foram os seus chefes.

A primeira personalidade eminente, que se encontra nesta época é também o mais famoso matemático de todos os tempos e de tôdas as nações: Euclides.

Tendo nascido em Alexandria e tendo florescido cêrca do ano 300 antes de Cristo, levou vida tranquila à sombra do trono dos móveis Faraós, dividindo o próprio tempo entre realizar pesquisas matemáticas, coordenar os resultados das anteriores e difundir, oralmente, da sua cátedra, no Museu, os frutos de umas e outras.

Faltam outras notícias biográficas mais minuciosas em relação a êle, se se prescinde daquelas, de resto pouco consideráveis, pouquíssimo dignas de nota e mediocremente interessantes, que nos chegam por intermédio dos Árabes; é conhecido sòmente que era daquela índole branda, que é tão comum entre os matemáticos, e que era propenso a transmitir aos pósteros as descobertas dos predecessores, sem lhes fazer nenhuma alteração.

A extraordinária popularidade de Euclides repousa, em máxima parte, sôbre os seus "Elementos", obra que por longos séculos foi escolhida — e ainda não cessou de sê-lo como livro de texto geométrico, nas escolas mais reputadas; obra que, pelo número de edições e de traduções pode certamente competir com a Divina Comédia e talvez sòmente é vencida pela Bíblia Sagrada.

A grande popularidade, de que já desfrutava Euclides desde a Idade Antiga, fêz-se ainda maior por causa de algumas anedotas da sua vida, que chegaram a se fazer correntes entre o povo.

Destas é a mais conhecida a que diz que, havendo-lhe perguntado o rei Ptolomeu se não havia acesso mais fácil à Geometria do que os Elementos, lhe respondeu: "Não existe na Geometria nenhum caminho especial para os reis".

Os elementos constituem como o coroamento dos esforços de Platão para a sistematização da Geometria. Nêles se contêm, senão a totalidade das proposições, pelo menos tôdas as mais importantes descobertas dos seus predecessores, especialmente de Eudoxio e Teetetos. Ficaram excluídas, por não serem elementares, as tentativas para a resolução dos três famosos problemas anteriormente mencionados, assim como o cálculo da área do círculo, que já podia então ser calculada com suficiente aproximação para as aplicações práticas.

No estudo histórico das obras, que marcaram a sua impressão na concepção filosófica das ciências, os "Elementos" de Euclides apresentam-se imediatamente depois das "Analíticas" de Aristóteles.

Uma e a outra obra tiveram o mesmo destino; atravessaram os séculos, destacadas do que podia precedê-las e do que podia seguí-las, oferecendo o quadro dum rigor que parecia inatacável, marcando um ponto de perfeição que se não esperava ultrapassar. Por meio delas a razão antiga modelou, de alguma sorte, o pensamento moderno.

Euclides, para as numerosas gerações que se têm nutrido da sua substância, tem sido menos talvez um professor de geometria do que um professor de lógica. A forma dedutiva dos "elementos" torna evidente e consagra a universalidade de aplicação, de que a lógica de Aristóteles era capaz.

Mas esta perspectiva tradicional, em que a lógica euclidiana aparece como um caso particular da lógica aristotélica, é retificada pelo conhecimento do desenvolvimento do pensamento grego. Se têm sido compostos muito tempo depois das "Analíticas" de Aristóteles, os "Elementos" de Euclides põem como contribuição a obra das gerações que precederam Aristóteles, não sòmente a obra técnica de descoberta, mas também a obra metodológica de encadeamento e de demonstração que, empreendida na escola de Pitágoras, se completa nas escolas de Eudoxio e de Platão.

A lógica de Aristóteles e a geometria de Euclides esclarecer-se-ão mùtuamente, sem que a segunda em data proceda necessariamente da primeira. Ambas provieram duma mesma raça e dum mesmo espírito; em ambos o gênio grêgo inscreveu com tal sucesso o seu ideal de harmonia interna que lhes tem acontecido aparecer através dos séculos como desligados das suas origens históricas, sob o aspecto da verdade eterna: "um tesouro para sempre".

Folheemos agora os "Elementos", para termos dêles uma visão mais imediata. O título grego era "Stoicheia" e são divididos em treze livros.

No início está o famoso sistema de axiomas, a reunião das explicações, das premissas e das proposições fundamentais. Êstes grupos de enunciados têm sido chamados também definições, postulados e axiomas e tem-se discutido muito em que se distinguem entre si. Certamente os axiomas ou proposições fundamentais não são mais do que conhecimentos gerais ou geralmente válidos, patrimônio comum a todos os homens, conhecimentos que não querem demonstração e que, por outro lado, não poderiam ser demonstrados.

Tôda demonstração, mesmo a mais complicada, deve chegar finalmente a êstes axiomas, sôbre os quais é fundada. Que o todo seja maior do que a parte (axioma 9.º) ou que duas retas não possam nunca encerrar uma área (axioma 12.º) deve achar-se na base de qualquer raciocínio matemático, como também, por exemplo, o postulado 3.º, que é sempre possível construir um ponto qualquer tomado como centro.

Além disso, a geometria põe como simples definição que um ponto não tem partes (definição 1.ª), que uma linha só possui comprimento e não tem largura (definição 2.ª) e que um ângulo simètricamente igual ao seu ângulo adjacente é um ângulo reto (definição 10.ª).

Sôbre um número restrito de definições, postulados e axiomas, Euclides eleva todo o edifício da sua matemática, bem que no curso do desenvolvimento acrescente ainda um grande número de definições, porém nenhum outro axioma ou postulado.

Convém mencionar que, segundo o parecer de alguns tratadistas da antiguidade, o escopo final e o coroamento da obra de Euclides era o estudo dos corpos. Em Euclides se tem uma demonstração rigorosa de que só pode haver cinco sólidos regulares, o que vem também demonstrado muito elegantemente.

Proclo que, da pretensa pertinência de Euclides à filosofia platônica, deduz que o seu intento era o estudo dos "elementos" — os sólidos platônicos — em uma outra passagem diz, de modo mais plausível, que se poderiam chamar "elementos" tôdas as cousas, "cuja teoria ajuda a penetrar

Ilustração a carvão para a poesia "Última oração da luz" do Dr. Hélio Simões na compreensão das outras cousas e, a partir das quais, se nos torna facilitada a resolução das dificuldades ingênitas nestas outras cousas".

Em resumo, mediante os elementos estaremos em condição de nos apoderarmos de tôdas as cousas, que pertencem à Matemática.

O império do mundo "euclidiano", da Matemática "euclidiana" permaneceu incontestado até o início do século XIX, bem que sôbre, um dos seus axiomas, o postulado das paralelas que é, segundo as interpretações, o axioma 11.º ou o postulado 5.º, mesmo os antigos gregos tenham quebrado a cabeça.

A impossibilidade da demonstração dêste postulado, impossibilidade que só foi estabelecida de modo indubitável no último século, conduziu ao descobrimento das geometrias não euclidianas, tão importantes hoje em Física e em Astronomia; e com isto, depois de dois mil anos de discussões, ficou brilhantemente estabelecida a justiça com que Euclides considerava esta proposição como postulado.

Até o século XIX, Geometria significava Geometria euclidiana, isto é, um certo sistema de proposição deduzidas de premissas que, supunha-se, descreviam o espaço em que vivemos. Isto continuou durante muito tempo, devido a que os seus resultados eram aplicáveis pràticamente no mundo existente — o que sem dúvida é importante para o engenheiro — e encerravam em si verdades científicas. Porém, para assegurarmos de que era assim, necessitávamos uma das duas, ou que estivéssemos seguros da verdade própria das nossas premissas, ou que pudéssemos demonstrar que nenhum outro conjunto de axiomas daria resultados consistentes com a experiência.

A primeira destas alternativas foi adotada pelos idealistas e especialmente defendida por Kant. A segunda representa aproximadamente a posição dos empiristas, antes do não-euclidiano. Porém apresentaram-se objeções a ambas alternativas.

Para o ponto de vista kantiano, era necessário sustentar que todos os axiomas são evidentes por si mesmos ponto de vista que a gente honesta achava difícil estender ao axioma das paralelas. Daí surge a busca de axiomas mais plausíveis, que se possam chamar verdades "a priori". Porém, ainda que se sugerissem muitos dêsses axiomas, todos se prestavam à dúvida e a busca só serviu para levar ao ceticismo.

A segunda alternativa — o ponto de vista de que nenhum outro conjunto de axiomas daria resultados consistentes com a experiência — só se podia comprovar, por meio duma habilidade maior do que a que tem o conjunto da maioria dos filósofos. Dêste modo a prova ficou em suspenso, até que Lobatchewsky e Bolyai desenvolveram os seus sistemas não euclidianos.

Então se provou, com tôda a fôrça da demonstração matemática, que premissas distintas das de Euclides podiam dar resultados empìricamente indistinguíveis, dentro dos limites da observação dos sistemas ortodoxos. Em consequência, viu se igualmente destruído o argumento empírico em favor de Euclides.

Porém a investigação deu origem a um novo espírito entre os geómetras. Havendo achado que a negativa do axioma das paralelas de Euclides conduzia a um sistema diferente, consistente em si, e possìvelmente verdadeiro para o mundo real, os matemáticos se interessaram no desenvolvimento das consequências, que surgiram de outros conjuntos de axiomas mais ou menos semelhantes aos de Euclides. Dêste modo, surgiu um grande número de geometrias, inconsistentes em geral entre si, porém cada uma auto-consistente.

A semelhança com Euclides, requeria em qualquer conjunto de axiomas que se sugerira, foi diminuindo e os sistemas dedutivos possíveis se investigaram mais e mais em seu próprio conteúdo. Dêste modo, a geometria transformou-se em um ramo da matemática pura — como antes se tinha chamado equivocadamente — isto é, u'a matéria, em que as asserções são que tais consequências se deduzem de tais e tais premissas, independentemente de que existam realmente entendidas tais como as premissas descritas.

Assim, a matemática pura seria, segundo uma característica definição de Russel, "uma ciência em que, não se sabe nunca de que cousa se fala, nem se isto, de que se fala, é verdadeiro".

Enquanto Euclides nos oferece o tipo mais genuino do professor e do tratadista, aquêle, que a ordem cronológica nos impõe agora considerar, apresenta um fúlgido exemplo do investigador original que, não cuidando de aplainar o caminho para os noviços, se preocupa sòmente de revelar novas verdades a si mesmo e aos pensadores já maduros; razão por que, enquanto para compreender Euclides não é necessária uma inteligência e uma cultura de execução, as produções de Arquimedes são destinadas exclusivamente a leitores de inteligência não comum.

Arquimedes nasceu em Siracusa, no ano 287 antes de Cristo, motivo por que alguns o consideram como um geômetra italiano; opinião esta com que muitos relutam em concordar, porque as suas obras, conquanto aparecidas numa época, em que as águias romanas já tinham despreendido vôos soberbos, são escritas no dialeto dórico, motivo por que pertencem indiscutivelmente à literatura grega. Querem alguns que o seu pai tenha sido o astrônomo Fídias, conhecido por uma tentativa para determinar a relação de grandeza entre o sol e a lua, e todos concordamos em considerá-lo ligado, vínculos de parentesco e de amisade, com a casa então reinante na sua cidade natal.

Para fins de estudo, Arquimedes transportou-se ao Egito, para entrar em contacto, não com Euclides que então já tinha morrido, mas com os sucessores dêste, estreitando relações de amisade com alguns geômetras, a quem dedicou os trabalhos que realizou depois da sua volta à pátria.

Aqui se consagrou inteiramente aos estudos de geometria e de mecânica; mas, quando, no curso da segunda guerra púnica, Siracusa, como aliada de Cartago, foi assediada pelo exército romano, pôs êle o seu gênio a serviço da terra natal e mostrou-se tão extraordinàriamente fecundo, no inventar armas ofensivas e de defesa — basta recordar aqui as potentes catapultas e os legendários espelhosustórios — que apresentou o espetáculo, único na história, de um só homem combatendo, durante um triênio, contra um exército inteiro; sòmente transformando o assedio em bloqueio e depois recorrendo à astúcia mais refinada, poude Marcelo, o duque romano, vencer o Briareu Matemático, com quem se achava lutando.

Durante o saque que seguiu à redução de Siracusa, Arquimedes perdeu a vida, mau grado as ordens dadas pelo general latino, para que fôsse respeitado; à sua memória foi elevado um túmulo condigno, sôbre o qual, para satisfazer um legítimo desejo do ilustre extinto, foi gravada uma esfera inscrita em um cilindro, em perene memória de uma das suas mais importantes descobertas; tal sepulcro foi descoberto e restaurado por Cícero, quando foi questor na Sicília, porém hoje não se acha mais nenhum vestígio dêle.

A propósito da morte de Arquimedes conta-se que, vencida Siracusa, um legionário entra numa casa aparentemente desabitada e encontra no jardim um velho, desenhando figuras na areia. Porque não deveria fazê-lo? E' certo que hoje há muito alarido na cidade, porém, tem havido isso tão frequentemente nos últimos dois anos, e a resolução do problema não pode ser adiada, Arquimedes levanta apenas o olhar, vê sòmente que um pé está pisando êsses sinais e diz plàcidamente: "Não estropies os meus círculos!" Quase no mesmo instante a espada do legionário põe fim aos seus dias.

Agora devemos recuar um pouco no tempo, afim de que procuremos os antepassados intelectuais desta estranha figura, que foi Arquimedes.

Já temos dito alguma cousa sôbre os eleatas, sôbre a escola filosófica fundada pelo grande Parménides. Era máximo princípio do mundo o reduzir à simples aparência tôda cousa em via de transformação, uma escola de que se pode dizer que Zenon, com os seus paradoxos sofísticos, representa um eco caricatural.

O conceito elástico sôbrevive nos ensinamentos platônicos, dos ideais Eternos, protótipo de tudo o que existe, de tôda a realidade imprecisa e impura. E' daí que essa doutrina fundamental de uma eternidade em si imóvel se transplanta a Aristóteles, até que acha a sua expressão mais completa, na matemática puramente estática e superlativamente clara de Euclides.

A filosofia do ser era assás conforme com a mentalidade dos helenos, tôda voltada para a harmonia. Os gregos odiavam tudo o que era privado de forma e de confins e não queriam tocar as cousas que superando a medida humana, pertenciam pròpriamente aos Deuses. Prometeu, que tinha realizado empresas sobrehumanas, foi encadeado ao Caucàso e as águias de Zeus lhe devoraram o fígado.

Há talvez um significado simbólico no fato de que, quase contemporaneamente a Parménides no extremo oposto do mundo helênico, em Efeso, começasse a ensinar um homem que desencadeou na Hélade todo o fogo de Prometeu ou pelo menos, criou a base espiritual dêste acontecimento.

Êste homem chamava-se Heráclito e, já na antiguidade foi denominado o "obscuro Heráclito", não tanto pela concisão epigramática das suas sentenças quanto pelo conteúdo dos seus ensinamentos.

Heráclito contrapôs ao ser dos eleatas o eterno vir a ser "Tudo fluir" e "o contraste é pai de todos os acontecimentos" são as suas afirmações fundamentais, as quais fazem do eternamente imóvel o eternamente mutável e do ser um vago ponto de pasagem entre o passado e o futuro.

Estas doutrinas, como a eleata, agem de modo decisivo no campo da matemática, pois que a linha, segundo Heráclito, não é mais um colar de pontos, um visinho ao outro e distintos entre si, porém é concebida como a trajetória dum ponto e é por isso contínua. Com isto foi introduzido de certo modo na geometria o conceito de infinito, interdito aos mortais e só compreensível aos Deuses, pois que um contínuo, para ser verdadeiramente tal, deve consistir de inumeráveis pontos um vizinho ao outro e distintos entre si, porém é concebida como a trajetoria dum ponto móvel e é por isso contínua.

No meio desta incerteza de conceitos, surge uma outra mente excelsa, cuja obra não será nunca bastante exaltada, porque chegou até os nossos dias conservando todo o seu valor.

Eudoxio, um contemporâneo de Platão, resolveu, com efeito, de um só golpe, o dilema entre "finito" e "infinito", introduzindo o conceito de "pequeno à vontade" e instituindo com rigor lógico a assim chamada "passagem ao limite".

Bem que os Helenos, com Eudoxio, tivessem entrado na posse dum método infinitesimal rigorosamente lógico, não surgiu, na sua mente a idéia de generalizá-lo. Empregaram, ao contrário, a demonstração por exaustão em cada caso isoladamente e continuaram a procurar as quadraturas e cubaturas com os métodos, que lhes pareciam mais condizentes com o espírito da verdadeira geometria.

Retornemos agora a Arquimedes, cuja última batalha pela "polis", pela cidade natal é altamente simbólica. Ela demonstra que a matemática helênica, no seu orgulhoso isolamento, se voltou para a realidade, quando já era demasiado tarde.

"Dai-me um ponto de apôio e porei a Terra em movimento", dizia orgulhosamente êste mesmo Arquimedes, que conseguiu, é verdade, destruir alguns navios de guerra romanos, mas não poude salvar a si mesmo e ao seu povo da ruína.

Vejamos em que consiste essa realidade, de que a Matemática se pode achar mais ou menos afastada.

O nosso espírito tem duas possibilidades formais, para extrair do caso originário um universo ordenado. Estas duas possibilidades ou formas da intuição, segundo Kant, são o espaço e o tempo. O movimento, porém, vive participando de uma e da outra.

Os antigos Helenos eram inclinados a dar maior importância ao estudo do espaço formal, que é propriamente o mundo do ôlho, procuravam desesperadamente, para dizê-lo em linguagem moderna, formar uma "visão instantânea" do mundo e analizar depois as suas propriedades. A arquitetura e a plástica são formas artísticas de expressão desta conformação espiritual.

Ao contrário, os seguidores de Heráclito, os fanáticos do "panta rei" — tudo flui — só queriam considerar, por assim dizer, a cinematografia dos acontecimentos e interpretar o que existe, do ponto de vista do devenir.

O exagêro do conceito eleático conduz, da realidade a uma espécie de nirvana, enquanto o ímpeto prometeico da escola de Heráclito degenera na mania do progresso.

À vida real, porém, cuja lei é, segundo as palavras dos pitagóricos, exatamente a falta de lei do irracional, não pode ser suficiente uma só destas duas concepções.

Por causa desta constituição mental, a matemática grega até Arquimedes não cuidou de utilizar a mecânica como ponte, para introduzir, no mundo da realidade, uma técnica que já estava contida nela em estado potencial. Por vários séculos, esta deficiência foi compensada pela superioridade física e moral dos homens, mas, quando a Hélade entrou em conflito com a capacidade organizadora de Roma, viu-se, na ocasião do cêrco de Siracusa, que o helenismo se tinha sacrificado em massa pelo ideal euclidiano da pureza formal.

Já era demasiado tarde; não podia um homem só, nem mesmo um Arquimedes, esconjugar a catástrofe. Desde então, Roma começou a utilizar, para os próprios objetivos de hegemonia mundial, o espírito grego despertado para a realidade no ato de morrer.

Mau grado tudo, a um homem como Arquimedes só foi possível aplicar a Matemática à realidade, construindo sôbre os seguros e inatacáveis alicerces euclidianos.

Arquimedes distinguiu-se da maioria dos seus predecessores, porque se pôs contra todos os preconceitos por amor da "realidade". Esta realidade, porém, sempre o impeliu mais para a frente, pois que ela não tolera nenhuma parada contemplativa sôbre formas puras e proporções.

Encontram-se em Arquimedes, a milhares de anos de distância, as características da verdadeira grandeza mental do homem. Êle mesmo foi o grande mestre do método de "exaustão", a sua obra porém, conquanto aparentemente de pequeno vulto a julgar pelo número de páginas, é difìcilmente "exaurível". E' pouco compreensível o milagre por que, dentro de círculos culturais rigorosamente fechados, surgem homens, que com as suas ações chegam a influenciar as civilizações, ainda não nascidas, do futuro. Êste porém é o conceito mais dinâmico e real da criação de valores "eternos", da imortalidade" potencial de tôda obra nobre.

Dezoito séculos mais tarde, o espírito faustano dos povos ocidentais devia retomar o caminho no ponto, em que o soldado romano tinha destruído cegamente os círculos desenhados por aquela mente titânica.

A morte de Arquimedes, pelas mãos de um soldado romano, é símbolo duma transformação mundial de primeira grandeza: os teóricos gregos, com seu amor pela ciência abstrata, foram desalojados da condução do mundo pelos práticos romanos.

Os romanos foram uma grande raça porém estavam condenados à esterilidade, que acompanha os espíritos demasiado positivos. Não aperfeiçoaram os conhecimentos dos seus antepassados e todos os seus progressos limitam-se a detalhes técnicos secundários de engenharia. Não foram suficientemente sonhadores para chegarem a novos pontos de vista, que poderiam proporcionar um domínio mais fundamental dos fenômenos naturais. Nenhum romano perdeu a vida por estar absorto na contemplação dum diagrama matemático.

Roma ganhou a guerra, destruiu finalmente Cartago e marchou para alturas quase inimagináveis de esplendor, porém não na ciência, nem na matemática. Tão rudemente práticos como o soldado romano, que despachou Arquimedes para o outro mundo, os romanos eram os primeiros expoentes robustos da vida viril e do pensamento bucólico e o primeiro povo importante, que se deu conta de que os que só têm dinheiro ou poder podem comprar uma quantidade razoável de cérebros. Quando necessitavam alguma ciência ou alguma matemática, que ainda não haviam sido reduzidas a uma regra empírica fácil, os romanos escravizavam os gregos, porém cometeram um grande êrro, quando mataram Arquimedes, pois êste tinha sòmente setenta e cinco anos e estava ainda em plena posse das suas faculdades. Nos cinco anos ou mais que lhe roubou o soldado, o seu espírito verdadeiramente prático podia ter ensinado aos romanos algo, que impedisse a degeneração crassa do intelecto, a qual finalmente os fêz inofensivos.

Em resumo, a matemática moderna nasceu com Arquimedes e morreu com êle por nada menos de dois mil anos. Ressuscitou com Descartes e Newton.

Cêrca de quarenta anos depois da morte de Arquimedes, ensinou em Alexandria, e mais tarde em Pérgamo, um geômetra denominado Apolônio, nascido em Perga e quiçá o segundo grande matemático da antiguidade.

Dois tipos de homens dominam o desenvolvimento da ciência, como o da arte; dois tipos nìtidamente distintos, muitas vêzes em luta entre si, sustentados tanto um como o outro por partidários prontos a se combaterem até com sangue, homens que dão corpo a sábios e agudos apotegmas acêrca da "verdadeira" ciência e da "verdadeira" arte.

E' bastante difícil estabelecer em que êstes dois tipos diferem, pois que, como em tôdas as cousas vivas, inumeráveis claros — escuros e pontos de contacto conduzem de um ao outro. Tôda definição sumária seria falsa, mas devemos procurar distinguir igualmente estas duas formas, sob as quais se apresenta o gênio, porque de modo contrário não poderíamos entender os homens, que têm uma influência decisiva sôbre o desenvolvimento espiritual e artístico da humanidade.

Em todo caso — e é a primeira diferença — um tipo como Arquimedes, mesmo conhecendo o encanto das formas puras, procura dominar e superar a realidade, não só com a perfeição formal mas também com o conteúdo.

Quer saber tudo até o fundo e não repousa um instante neste trabalho. Corre com audaz impaciência de uma noção à outra e, por isso, a sua obra leva mais que nunca a marca da imperfeição, da irregularidade, da desordenação. O outro tipo aplica-se a um único trabalho, que é levado a uma perfeição inatacável e depois destaca-se do seu criador como um ser dotado de vida própria atingindo por sua conta a eternidade.

As palavras precedentes servem para distinguir melhor o gênio de Arquimedes do de Apolônio. Arquimedes foi chamado, às vêzes o maior matemático da antiguidade, às vêzes até o máximo matemático de todos os tempos. Apolonio foi chamado, já na longínqua antiguidade, o "grande geometra", sobrenome que tem conservado inalterado através dos séculos.

Êstes dois homens exerceram influência capital na criação da matemática hodierna. Arquimedes introduziu o conceito dos infinitesimais, Apolônio, o das coordenadas, ambas premissas indispensáveis para a criação da nossa "matemática superior".

Apolônio não fêz progredir a matemática tìpicamente "archimediana" e isto deve ser particularmente sublinhado. Apolônio não se preocupava de que, em tôrno dêle, tremesse a terra, de que, durante a sua vida, se travassem batalhas decisivas para a hegemonia de Roma e de que caísse a potência política do helenismo. Não foi amedrontado pelo incêndio de Siracusa, não foi abalado pela atividade inventiva de Arquimedes, mas ocupou-se em levar a uma perfeição definitiva a matemática helênica, a geometria eleática e euclidiana, não permanecendo todavia fechado a qualquer novidade, chegando na teoria dos números a resultados, que se aproximam muito dos nossos sistemas dos valores de posição.

A sua obra típica e fundamental consiste, porém, nos famosos oito livros sôbre as secções cônicas, que nos foram transmitidos quase integralmente e demonstram uma perfeição tão estupefaciente que fazem desaparecer a última dúvida sôbre a simplicidade dos matemáticos gregos. O conceito de "alexandrino", no campo da cultura, é um conceito todo especial e bastam para defini-lo figuras como Euclides e Apolônio.

Portanto, Apolônio ligou-se, como já dissemos, à grande tradição helênica euclidiana, à parte algumas concessões de importância secundária e levou o estudo das curvas de segunda ordem, ou secções cônicas, a uma perfeição não mais superada por séculos.

Apolônio foi também o mestre supremo do metódo sintético em geometria. Deixou muito pouco que fazer aos seus sucessores quanto a êste método na geometria métrica das cônicas.

Apolônio de Petga, o "grande geometra", o mestre com que se fecha a idade heróica da matemática antiga tem por isso — independentemente do seu virtuosismo — pôsto em discussão mais de um problema fundamental da Matemática. E também se êle pôs, num certo sentido, a última pedra do edifício da geometria grega, o futuro devia demonstrar como esta suposta última pedra seria tornada a primeira base na sucessiva super-elevação.

Estais a me perguntar por certo porque não vos tenho falado das novas conquistas da ciência, mas da sabedoria antiga. Vou dar-vos a resposta, contando a seguinte anedota: Um rei muito complacente foi em certa ocasião visitar um observatório e perguntou ao astrônomo: "Que há de novo no céu?" Ao que o sábio respondeu sem vacilar: "Conhece já Vossa Majestade o antigo?".