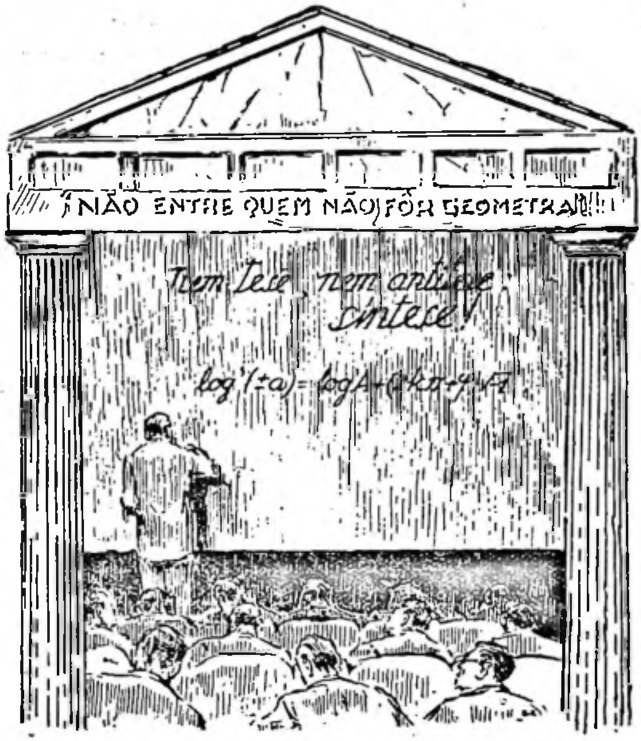
I PARTE

COLABORAÇÃO



Charge de Newton Silva

DIALOGO COM EULER

Prof. LEOPOLDO AFRANIO DO AMARAL
Catedrático de Matemática Superior

De 1749 a esta data, a teoria dos logaritmos das quantidades negativas é dominada inteiramente pelo pensamento de Euler. Nesse capítulo da Matemática, pensa-se com Euler, raciocina-se com Euler, erra-se com Euler.

A repetição cavou profundos sulcos nos cérebros. Não há, mesmo, um só argumento novo. Até os sofismas são velhos!

Nessa feira de repetidores há lugar para tudo, desde o realêjo até o papagaio...

Espírito intuitivo, rompí desde os bancos acadêmicos com o "tabú" daquela teoria. Mais tarde, apresentei revolucionária comunicação ao Congresso Internacional de Matemáticos, reunido em Bolonha, e agora vou bater às portas de academias norte-americanas, com êste diálogo, em que amadureço e completo idéias anteriores.

Completando as revoluções de Descartes e Euler — aquela, com a incorporação, ao mundo das quantidades negativas, da única função rebelde ao trato dessas quantidades; e a última, com a incorporação à ciência dos logaritmos r e a i s das quantidades negativas — procurarei dar repercussão internacional àqueles trabalhos, para maior proveito da Ciência.

L. A.

LEOPOLDO AMARAL — Mestre, viu quanto barulho se fêz em tôrno das dúvidas e dos esclarecimentos que eu suscitei, ao discutir a sua famosa teoria sôbre os logaritmos das quantidades negativas?

EULER — E' assim, meu amigo. "Todo criador de teorias é um iconoclasta. E o é por ser um emancipador. Poucos são os que anceiam pela verdade. A imensa maioria prefere as cadeias de sua servidão". Daí essa incompreensão.

A minha teoria teve a sua idade de ouro e deu os seus frutos. E' natural que a ciência, ao evoluir, tenha novos argumentos que escapavam à visão panorâmica da ciência do meu tempo, e eu estou aqui, justamente, para conhecer êsses novos argumentos.

L. A. — Para dar um pouco de método a êste diálogo, eu desejo, primeiramente, ressaltar a necessidade de um instrumento de cálculo mais maleável e mais extensível, capaz de explicar muita coisa que a sua teoria não pode explicar e de resolver certos problemas que essa teoria não pode resolver, a não ser por meio de artifícios e de expedientes contrários à própria teoria.

Diretoria

Para começar, vejamos, como resolver esta equação exponencial:

$$9^x = -3 \qquad (1)$$

Para solucioná-la pelos logaritmos, há matemáticos que usam e abusam de expedientes como êste:

"Aplicando os logaritmos, temos

$$x \log 9 = \log(-3); \text{ donde } x = \frac{\log.(-3)}{\log. 9}$$

Sendo $\log 9 = \log(-3)^2 = 2\log(-3)$, resulta:

$$x = \frac{\log(-3)}{2\log(-3)} = \frac{1}{2}, \text{ solução exata».}$$

EULER — Parece-me que, aí, é legítimo o artifício, uma vez que desaparece, por simplificação, o fator comum $\log(-3)$.

L. A. — Quer dizer que se, em lugar de -3, estivesse um número que não quadrasse bem com o número 9, seria necessário confessar a impotência do cálculo ou recorrer a um verdadeiro malabarismo de artifícios e prestidigitações?!

Agora, se eu pedisse ao Mestre calcular, pelos logaritmos, esta expressão:

$$x = (-8)^{\frac{2}{3}} \qquad (2)$$

como apresentaria tal cálculo?

EULER — Preliminarmente, eu examino se a expressão não importa em impossibilidade algébrica, para depois aplicar-lhe os logaritmos. Como essa expressão não contém absurdo algébrico, eu procedo assim:

Tomando os logaritmos, temos

$$\log. x = \frac{2}{3}\log(-8) \qquad (3)$$

Mas, $(-8)^2 = 64$, donde $2\log(-8) = \log 64$; $\log(-8) = \frac{\log 64}{2}$ (4)

Substituindo êste valor na expressão (3), vem:

$$\log x = \frac{2}{3}\cdot\frac{\log 64}{2} = \frac{\log 64}{3} = \frac{1{,}80618}{3} = 0{,}60206 \text{ donde } x = 4, \text{ solução exata}$$

L. A. — De acôrdo. Mas, não acha que o artifício, que empregou para achar log (— 8) = $\frac{\log. 64}{2}$, importa em confessar, indiretamente, que o logaritmo de (— 8) é igual ao logaritmo de 8, uma vez que aquêle quociente $\frac{\log. 64}{2}$ da expressão (4) é evidentemente igual a log (8)?

Não acha, também, que se no problema anterior substituirmos o valor x = $\frac{1}{2}$ naquela equação

$$x \log 9 = \log (- 3)$$

chegaremos a semelhante confissão indireta, isto é, de que log 3 = log (— 3) ?

EULER — Eu só admito êsses artifícios para contornar certas dificuldades analíticas, mas não posso chancelar o seu uso geral, porquanto a minha teoria mostra, formalmente, que as quantidades negativas não têm logaritmos reais.

L. A. — Chegarei até lá. Por enquanto desejo tão sòmente que o Mestre constate a necessidade de um instrumento matemático mais dutil, que faça por "obrigação" aquilo que, por ora, se faz por "concessão".

EULER — Tanto eu como outros matemáticos procuramos ampliar o quadro de logaritmos, mas esbarramos com aqueles imaginários da minha fórmula.

L. A. — Para derivar um pouco a conversa, tornando-a menos abstrata, passemos para um outro campo: o da Astronomia.

Seja-nos pedida a latitude β de uma estrêla, sendo dada a longitude $\lambda = 359^{o}\ 17'\ 44''$, a obliquidade da eclítica $\epsilon = 23^{o}\ 27'\ 32''$ e M = — 68^{o} 45, 42". Como determiná-la?

EULER — Temos a fórmula tg β = sen λ tg (M — ϵ e, assim, dispomos os cálculos:

$$\log \text{ sen } \lambda = n\ 8{,}08973$$
$$\log \text{ tg } (M - \epsilon) = 1{,}41147$$
$$\log \text{ tg } \beta = n\ 9.501120$$

Donde $\beta = -\ 17^{o}\ 35'\ 38''$

L. A. — Solução perfeita, o que vem provar que não há naqueles domínios de S. Pedro, lá em cima, só essa atitude de contemplação que nós prefiguramos para os eleitos de Deus. Mas, pergunto, agora, ao Mestre se não fêz um passe de prestidigitação, quando — ao calcular o logaritmo de seno evidentemente negativo — escreveu ali, como o faria qualquer astrônomo, esta grandeza real: 8,08973, uma vez que, pela sua interessante quanto famosa teoria, a grandeza negativa não tem logaritmo real?!

EULER — Há necessidades matemáticas que exigem o uso dêsses expedientes, nada legítimos, por isso que eu provei por $a + b$ que as quantidades negativas não têm logaritmos reais.

L. A. — Irei até lá. Por enquanto eu só desejo constatar esta confissão do Mestre: há necessidade de um instrumento matemático mais flexível ou de uma teoria mais geral do que a sua, capaz de atender a vários reclamos dos diversos setôres da Matemática.

EULER — Mas ninguém contesta isso...

L. A. — Bem. Fechado aquêle parêntesis da Astronomia, eu ia passar da Algebra elementar para o Cálculo integral, onde é farta a messe de exemplos, mas, por uma questão de método, passemos pelo Cálculo diferencial.

Preliminarmente, eu pergunto ao Mestre: Não seria altamente proveitoso para a ciência que a revolução introduzida na matemática pelo gênio de Descartes, quando nela integrou o meio mundo das grandezas negativas, fôsse *completada* com a de atribuir "realidade" à função logaritmica, quando nela se substitue x por — x?

EULER — Seria altamente desejável e proveitoso, mas a nossa boa vontade esbarraria na impossibilidade matemática.

L. A. — Não seria, também, altamente desejável e proveitoso que, para maior correspondência entre a representação analítica e a pintura geométrica, a Matemática aceitasse a existência de uma correlação, mais geral do que a presente, entre os valores que limitam o tipo transcendente de certas equações e os valores que correspondem aos tipos algébricos derivados?

EULER — Claro que seria altamente desejável, mas, antes de tudo, troque isso em meúdo...

L. A. — Concretisando o meu pensamento, eu quero significar que a mesma correlação de causa e efeito — existente entre os valores que impedem, por exemplo, o prosseguimento da "tractoria de Leibnitz" na região situada acima da reta $y = a$ e que tornam imaginários a tangente, o raio de curvatura, etc., no setor impedido — deva existir entre os valores que dão "realidade" a certos atributos de curvas como esta: $y = \log' \sec x$ e os valores que permitiriam fazer a pintura geométrica dessas curvas, ficando, assim, as exceções limitadas às curvas cujas equações contivessem o imaginário $\sqrt{-1}$ como, por exemplo, a curva de equação $y = \log' (x\sqrt{-1})$, reduzida a um ponto no infinito negativo (!), mas com atributos reais.

EULER — Eu vou empregar, aqui, o *distinguo* da velha filosofia:

I) Como parece que se refere a curvas logaritmicas rebeldes, eu devo dizer que, nos termos da minha teoria, não é possível haver essa correlação, sempre que se tratar de tais casos logaritmicos, do mesmo modo que não há aquela correlação entre a função

$$y = x^4 + \sqrt{-1}$$

e as suas primeiras derivadas ou — o que vem dar no mesmo — entre a curva e os seus atributos.

II) Se houver um corpo lógico de doutrina, que acabe com certas imperfeições da concepção cartésiana e que seja cômodo, economise pensamento e seja fecundo, explicando certos fatos velhos e outros fatos novos, claro que eu o receberei de braços abertos, com a só reserva de ver até que ponto essa doutrina implica em contradição com aquela minha teoria, geral, lógica e, igualmente, fecunda.

L. A. — Não acha o Mestre que eu poderia "desconhecer" a fórmula de Euler, do mesmo modo que hoje em dia — para me servir de uma comparação atual — se "desconhece", contornando, a linha Maginot ou a linha Siegfried?

EULER — Sim, se isto trouxesse resultado e fôsse útil à ciência.

L. A. — Mas, eu não preciso "desconhecer" ou contornar a linha Siegfried do pensamento de Euler. Mostrarei, mais tarde, que houve na sua teoria um êrro de generalização. Neste ponto da argumentação, eu só desejo constatar que o mestre aceitaria um corpo lógico de doutrina, à semelhança daqueles sistemas que imortalizaram Lobatschewsky e Riemann, creadores de geometrias baseadas no "desconhecimento" do postulado de Euclides; que levaram Poincaré a afirmar não haver geometrias mais ou menos verdadeiras e, sim, geometrias mais ou menos cômodas, e que levaram Einstein, mais tarde, a procurar diminuir, por meio de uma dessas geometrias, a distância que vai da realidade fenomenal ao esquema, da riqueza dos dados objetivos à pobre pobreza da sua tradução matemática.

EULER — Não acha que — apezar de ser real o coeficiente angular $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} x$ daquela curva

$$y = \log' \sec x,$$

nos setores de impedimento da curva, isto é, quando sec x é negativa — a tangente aí é imaginária, como nos mostra a equação geral das tangentes:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

onde y é imaginário?

L. A. — Essa pergunta encerra uma objeção que não está à altura do seu espírito genial. Eu estou, por enquanto, alinhando imperfeições e incongruências, para depois entrar na prova. O Mestre objeta tomando como hipótese o que, justamente, constitui a tese! Mas, se deseja explorar êsse filão, responda-me, primeiro, se poderá fazer qualquer objeção quanto à não imaginàriedade do raio de curvatura, em cuja expressão não figura a função y e, sim, as suas derivadas y' e y'', ambas reais nos tais setôres de "impedimento" da curva!

EULER — Adiante!

L. A. — Preliminarmente, nós não legislamos para os casos limites. Não há lugar para aquela aproximação que o Mestre faz, ao invocar a semelhança que deve haver entre tais funções logaritmicas e a função imaginária (sempre os imaginários):

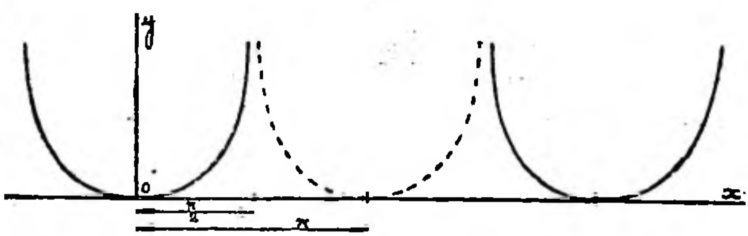
$$y = x^4 + \sqrt{-1}, \text{ por exemplo.}$$

E' que a pintura das curvas logaritmicas, nos setôres de "impedimento", vai decorrer da necessidade de se atribuir logaritmo real às quantidades negativas, em virtude, não sòmente, de exigências lógicas, analíticas e práticas, como também da circunstância de se ter introduzido um êrro de generalização na teoria do Mestre, falseando a verdade matemática.

EULER — Estou ancioso pela sua argumentação a êsse respeito.

L. A. — Continuemos êsse capítulo da necessidade de um instrumento de cálculo mais dutil e mais elástico, do que a teoria que fêz época, na história da Matemática como um dos mais portentosos monumentos do engenho humano.

Estudemos, por exemplo, a curva y = log' sec x.



A figura mostra a forma dessa curva com um dos hiatos devidos a se negarem logaritmos reais às quantidades negativas: sec $(\frac{\pi}{2} + \varepsilon)$, $\sec \pi$, etc. Pois bem, as derivadas de 1.ª e 2.ª ordem da função têm, respectivamente, os seguintes valores:

$$y' = \operatorname{tg} x \text{ e } y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

A derivada de 1.ª ordem mostra que para $x = \pi$, por exemplo, a tangente deve fazer um ângulo nulo com o eixo dos x; a derivada de 2.ª ordem mostra que, então, a concavidade da curva deve estar voltada para cima. As derivadas de 1.ª e de 2.ª ordens, conjuntamente, mostram (ao se anular a 1.ª quando $x = \pi$ e ao apresentar a 2.ª um valor positivo correlato a êsse valor de x) que a êste valor de x deve corresponder um *minimum* da função e que o raio de curvatura é, então, exatamente igual ao que corresponde, na origem das coordenadas, ao ramo real da curva. Agora, eu pergunto ao Mestre: se atribuirmos logaritmos reais às quantidades negativas, do mesmo modo que o senhor fêz ao lançar mão daquele artifício de que resultou a expressão (4) e que importa num reconhecimento disfarçado dessa convenção, haverá alguma incongruência entre as representações analíticas e as pinturas geométricas?

EULER — Não!

L. A.— Concorda em que não haveria incongruências para as demais curvas logaritmicas, sendo que a de equação $y = x \log' x$ (cuja derivada de 2.ª ordem $y'' = \frac{1}{x}$ se torna infinita para $x = 0$ e muda de sinal em tôrno dêsse valor) apresentaria, ademais, um ponto de inflexão, de coordenadas $(x = 0, y = 0)$?

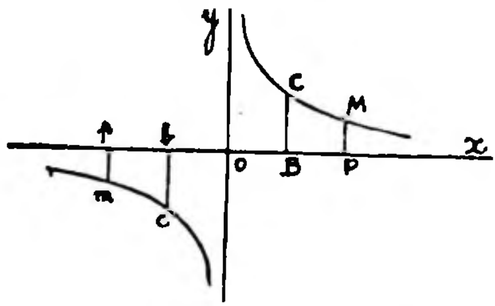
EULER — Parece que assim deve ser.

L. A. — Mostrado que não haveria incompatibilidade, no setôr do Cálculo diferencial, em se atribuir logaritmo real às quantidades negativas e que, ao contrário disso, essa convenção iria atenuar imperfeições da concepção cartesiana — tal como é aceita pela ciência —, passemos ao Cálculo integral, onde eu irei mostrar, sem que possa haver dúvidas ou subterfúgios, que se impõe uma *reconvenção*, para generalizar mais a teoria dos logaritmos.

No Cálculo integral, então, é farta a messe de exemplos que provam a necessidade de atribuir logaritmo real à quantidade negativa.

Na hipérbole equilátera, por exemplo,

$$y = \frac{1}{x}$$



como é que o Mestre acharia a área b c m p ?

EULER — A função $S = \log' x + C$, que exprime as áreas, em geral, da hipérbole equilátera, torna-se imaginária quando x é negativo, pois a função $S = \log' x$, transformada de $x = e^s$, não admite valor negativo para x; entretanto...

L. A — Perdão! Só não admite porque, apezar de se perceber que o instrumento logaritmico é manifestamente deficiente, por inoperante em certos setôres da Matemática, não se quiz, até agora, aceitar uma reconvenção proposta nestes moldes:

$$S = \log' x, \text{ sendo } x = \pm (e^s)$$

EULER — ... entretanto a área b c m p pode muito bem ser expressa assim: medindo-se, no lado negativo das abcissas, as grandezas Ob = OB e Op = OP temos

$$b\,c\,m\,p = B\,C\,M\,P = \log' \frac{OP}{OB} = \log' \frac{Op}{Ob}$$

o que é perfeitamente aceitável pelo cálculo, observando-se que, se substituirmos x por —x, a diferencial daquela área, tornando-se

$$\frac{d\,(-x)}{-x} = \frac{dx}{x},$$

tem, ainda, para integral aquela expressão $\log' x + C$.

Diretoria

L. A. — Mestre, fazer ciência é fazer, também, economia do pensamento, tendo, nela, posição proeminente a ordenação e a explicação sintética dos conhecimentos humanos. Tôda essa viagem de circumnavegação, feito pelo Mestre para explicar uma coisa tão simples, eu pouparia desta maneira singela:

Sendo log'x = log' (— x) e dados Ob = — 1 e Op = — 2, temos

$$\text{area } b\,c\,m\,p = \Big[\log' x\Big]_{-1}^{-2} = \log' 2 - \log' 1 = \log' 2 = 0{,}69315$$

Verifique, Mestre! Evitar-se-ia, assim, economisando-se pensamento e prodigalizando-se compreensão todo aquêle trabalho, que só serve para se constatar, no final, isto: A verdadeira redução à 1.ª região — operada pelo Mestre e semelhante àquela "camouflada" redução do 1.º quadrante existente no cálculo logaritmico do problema de Astronomia, que vimos anteriormente — mostra, ao substituir o Mestre, sem êrro, um pelo outro, que o logaritmo da quantidade negativa é igual ao logaritmo da quantidade positiva correspondente!

Expediente mais ou menos parecido é empregado quanto à curva de equação $y = \frac{ax}{x}$ e cuja área depende também de log'x.

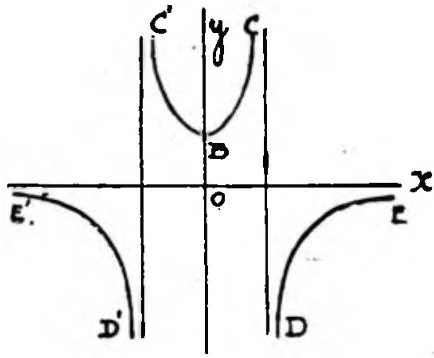
Alguns autores aconselham ainda — dentro dessa ordem de idéias — que substituamos log (x — a) por log (a — x), nas integrais, sempre que x — a fôr negativo, pois, então, "log (x—a) é imaginário". Mas essa prestidigitação não viria mostrar, mais uma vez, que log (x — a = log (a — x)?

Todos êstes fatos demonstram, também neste ponto, a verdade do brocardo que, em francês, tem uma deliciosa expressão: *Chassez le naturel; il revient au galop!*

EULER — Mas, até agora, você não apresentou um só exemplo que, apezar disso, não possa ser solucionado por êsses artifícios, perfeitamente cabíveis no Cálculo.

L. A. — Com o seu extraordinário valor mental, o Mestre não julga, naturalmente, que Matemática seja malabarismo ou ginástica! Mas, veja agora se pode achar, por êsses processos, as áreas da curva de equação

$$y = \frac{1}{1-x^2} \quad (5)$$



nos setôres correspondentes ao ramo D' E' e a B C'.

EULER — As áreas dessa curva são dadas pela integral:

$$S = \int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \log' \frac{x + 1}{x - 1} + C.$$

Aplicando o expediente que você condena, mas que tem propiciado bons resultados, eu substituo o x por — x e acho:

$$S = \int \frac{d(-x)}{1 - (-x)^2} = \int \frac{-dx}{1 - x^2} = -\frac{1}{2} \log' \frac{x + 1}{x - 1} + C$$

ou a expressão equivalente $\frac{1}{2} \log' \frac{x - 1}{x + 1} + C$, oriunda da integração de $\frac{dx}{x^2 - 1}$.

Fazendo-se, assim, uma espécie de redução à 1.ª região, onde o logaritmo é real por que x é positivo, dispomos dêste modo as operações:

I) Para as áreas correspondentes ao ramo D' E' :
($x > 1$, pois o artifício transpõe o cálculo para a região dos x positivos).

Achemos a área entre os limites $x = 2$ e $x = 3$, por exemplo:

$$S = -\frac{1}{2} \left[\log' \frac{x + 1}{x \quad 1} \right]_2^3 = -\frac{1}{2} \left[\log' \frac{3 + 1}{3 - 1} - \log' \frac{2 + 1}{2 - 1} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\log' 2 - \log' 3 \right] = -\frac{1}{2} \log' \frac{2}{3}$$

Área positiva — solução exata.

II) Para as áreas correspondentes à zona onde se acha B C':

(x compreendido entre 0 e 1, pelo mesmo motivo)

Achemos a área entre os limites $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$ por exemplo:

$$S = -\frac{1}{2}\left[\log' \frac{x+1}{x-1}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\left[\log' \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1} - \log' \frac{1}{-1}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\log'(-3) - \log'(-1)\right]$$

L. A. — E agora, mestre, como poderá sair da entaladela, desde quando considera imaginários os logaritmos das quantidades negativas?! Saiu de Cila para cair em Caribde...

EULER — Você, agora, me apertou todo! Mas, deve ser uma dessas exceções, de que está cheia a Matemática...

L. A. — Além de ser tudo isto anti-científico e anti-didático, é tão artificial que o natural volta a galope...

Note, agora, como tudo é simples, quando se atribue à quantidade negativa o mesmo logaritmo real da quantidade positiva corespondente, e se parte da fórmula geral:

I) Para as áreas relativas ao ramo D' E'

Determinemos a área compreendida entre os limites $x = -2$ e $x = -3$, por exemplo.

Temos:

$$S = \frac{1}{2}\left[\log' \frac{x+1}{x-1}\right]_{-2}^{-3} = \frac{1}{2}\left[\log' \frac{-3+1}{-3-1} - \log' \frac{-2+1}{-2-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log' \frac{1}{2} - \log' \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{2}\log' \frac{3}{2}$$

Área positiva; solução exata, igual à que o Mestre achou por intermédio dos fatores negativos: $-\frac{1}{2}$ e $\log' \frac{2}{3}$

II) Para as áreas relativas ao ramo D E:

Seja pedida a área compreendida entre os limites $x = 2$ e $x = 3$, por exemplo.

Aqui não há dificuldade para qualquer das duas teorias:

$$S = \frac{1}{2}\left[\log'\frac{x+1}{x-1}\right]_2^3 = \frac{1}{2}\left[\log'\frac{3+1}{3-1} - \log'\frac{2+1}{2-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log' 2 - \log' 3\right] = \frac{1}{2}\log'\frac{2}{3}$$

Solução exata: área negativa, equivalente, em valor absoluto, à que foi achada no item I (ramo D'E', simétrico a D E).

III) Para as áreas relativas ao setôr onde se acha B C' :

Vamos determinar, por exemplo, a área compreendida entre os limites $x = 0$ e $x = -\frac{1}{2}$. Temos:

$$S = \frac{1}{2}\left[\log'\frac{x+1}{x-1}\right]_0^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[\log'\frac{-\frac{1}{2}+1}{-\frac{1}{2}-1} - \log'\frac{1}{-1}\right] = \frac{1}{2}$$

$$\left[\log'\left(-\frac{1}{3}\right) - \log'(-1)\right] = \frac{1}{2}\log'\frac{1}{3}$$

Área negativa; solução exata ainda, que o mestre não poude achar pela sua teoria, o que depõe a favor de uma concepção que economisa pensamento e é fecunda, explicando fatos novos e antigos. A falha que o mestre não poude transpôr com o artifício provém, nesse exemplo, da circunstância de ser par o expoente de x contido no denominador da função (5). Naturalmente que, nem sempre, podemos achar diretamente, em valor relativo, a solução de um cálculo logaritmico, o que se pode constatar ao calcularmos, por logaritmos e dentro da convenção aqui adotada, o valor de 8×-4, por exemplo, e ao solucionarmos o problema de Astronomia, a que aludimos anteriormente e onde aquele *n* colocado junto ao logaritmo de certas grandezas salva a situação algébrica.

EULER —A sua argumentação é engenhosa, mas não me convence, uma vez que ela está em contradição com o que eu demonstrei e foi incorporado à ciência.

L. A. — Se, ao envez de estar discutindo com um espírito genial como é o Mestre, eu o fizesse com um dêsses matemáticos aqui de casa, que, em matéria de evolução, são capazes de querer ressuscitar um mastodonte para jogar contra um "tank", um pterodátilo para lançar contra um avião ou um atlantosáurio para afundar um navio de guerra, seria o caso de se exclamar como Bacon: "Não são asas que convém pôr ao espírito humano, mas chumbo"!

Mas ainda há melhor: alguns dos principais discípulos de Euler — e Cauchy é um dos mais eminentes — preferem fazer tôda a espécie de malabarismos com os logaritmos imaginários — elegante extensão da teoria do Mestre — a aceitar os logaritmos reais das quantidades negativas. Faça idéia de que matemáticos como Cauchy, Bertrand, Briot, etc. chegam a calcular áreas reais, atribuindo-lhes valores imaginários, do tipo $(2k + 1)\ \pi \sqrt{-1}$. Está de acôrdo com êsse algebrismo futurista?

EULER — Naturalmente, não posso concordar com essa extensão forçada: eu preferiria confessar que os instrumentos matemáticos são inoperantes ainda, para fazer *diretamente* certos cálculos logaritmicos, onde existam quantidades negativas.

L. A. — Isto depõe a favor da sua honestidade científica e eu estava, justamente, esperando essa confissão para arremeter contra o único obstáculo que impede a existência dos logaritmos reais das quantidades negativas: a sua famosa teoria.

EULER — Estou ancioso por conhecer os seus argumentos.

L. A. —— Consideremos a fórmula geral que, transformada, nos dá todos os logaritmos atualmente aceitos pela ciência.

$$a + b\sqrt{-1} = e^{\frac{1}{2}\log'(a^2 + b^2) + y\sqrt{-1}}$$

em que y é ligado a a e b pela expressão:

$$\cos y = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Aplicando os logaritmos àquela exponencial, depois de ali substituirmos y por $2k\pi + \varphi$, achamos:

$$\log'(a + b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\log'(a^2 + b^2) + (2k\pi + \varphi)\sqrt{-1} \qquad (7)$$

Fazendo $b = 0$, para achar os logaritmos reais, e chamando A o valor absoluto de a, vem:

$$\log'(a) = \log' A + (2k\pi + \varphi)\sqrt{-1}$$

Se a fôr positivo, isto é, $a = A$, teremos:

$$\cos y = \frac{A}{A} = 1;\; y = 2k\,\pi \text{ e } \varphi = 0$$

Consequentemente,

$$\log'(A) = \log' A + 2k\,\pi \sqrt{-1}$$

Expressão sôbre a qual não há divergência e que nos mostra que a quantidade positiva tem um só logaritmo real (o seu logaritmo aritmético: log. A) e uma infinidade de logaritmos imaginários.

Se a fôr negativo, isto é, $a = -A$, teremos:

$$\cos y = \frac{-A}{A} = -1;\; \varphi = \pi \text{ e } y = 2k\,\pi + \pi$$

e, então,

$$\log'(-A) = \log' A + (2k + 1)\,\pi \sqrt{-1}$$

fórmula que a ciência clássica apresenta como traduzindo que as quantidades negativas não têm logaritmos reais.

O sofisma, ou, melhor, o paralogismo — porque o Mestre, enunciando raciocínio semelhante, ao deduzir de sua famosa fórmula o pretendido logaritmo de — 1, procurava servir, honestamente, à ciência — consiste em se operar com a expressão (7) sem se levar em conta que essa transformada da expressão (6) está condicionada às mesmas limitações que devem restringir a generalidade desta última.

E' isso um dos defeitos do uso mal orientado, na Matemática, do método dedutivo, onde o "arrazoamento simbólico" de que fala o sábio Leibnitz géra o hábito de se "pensar por fórmulas" e o de "pronunciar raciocínios sem raciocinar" muitas vêzes: Um suporte cômodo do raciocínio cujo uso economisa pensamento — o que é científico — mas cujo abuso pode gerar contradições e absurdos, como nesse caso.

Explicado isto, consideremos as duas fórmulas básicas que servem à pesquisa dos logaritmos das quantidades negativas:

$$a = e^{\log' A + y\sqrt{-1}} \tag{9}$$

e

$$\log'(a) = \log' A + y\sqrt{-1} \tag{10}$$

Para mostrar mais realisticamente os defeitos da dedução que conclui pela imaginariedade dos logaritmos das quantidades negativas, escalonemos assim o raciocínio:

I) Como estamos procurando os logaritmos *reais* dessas quantidades, temos de achar a condição a que deve satisfazer a transformada (10), para que log' (a) seja *real*. Esta condição é, evidentemente:

$$y \sqrt{-1} = 0$$

II) Determinada essa condição, a expressão (9) primitiva se reduz a:

$$a = e^{\log' A}$$

III) Isto posto, devemos, agora, verificar se é possível atribuir à grandeza *a* um valor negativo: Não é possível, uma vez que *e* 2.º membro desta expressão é *positivo* (com boa vontade, pode-se atribuir ao 2.º membro um valor negativo, correspondente ao caso de ser o expoente de *e* igual a uma fração irredutível, cujo denominador seja um número par, mas, nesta hipótese, outra raiz de $e^{\frac{c}{2n}}$ é positiva, não se quebrando, assim, o nexo de positividade).

Consequência lógica: *A fórmula de Euler* (ou as suas generalisações, como as aceita a ciência) *não pode admitir valor negativo, real,* para a grandeza cujo logaritmo nós procuramos por intermédio de sua transformada.

Mas, se a equação primitiva está sujeita a esta restrição, é evidente que a sua transformada imediata não é própria para fornecer os logaritmos reais das quantidades negativas.

A despeito dessa orientação clara e intuitiva, não dando lugar a êrro de generalização, procedem assim:

Pegam uma fórmula que não está adaptada para admitir quantidades negativas; transformam-na numa outra que torturam, introduzindo a hipótese absurda $a = -A$; acham — como é natural que achassem — valores imaginários e exclamam triunfantes: "As quantidades negativas não têm logaritmos reais. Demonstra-o, por a + b, a fórmula de Euler"!

E eu concluo, triunfando sôbre o triunfo: E' verdade, demonstra-o por $a + b\sqrt{-1}$!...

EULER — A argumentação é engenhosa, mas não me convence, pois, matematicamente, nada impede que se ache na expressão:

$$a = e^{\log' A} \times e^{y\sqrt{-1}}$$

um valor negativo para o 2.º fator do 2.º membro, por intermédio dos imaginários, e que, assim, *a* seja negativo!

L. A. — Vou anotar devidamente esta expressão do Mestre: "por intermédio dos imaginários". E' o que eu dizia há pouco: Demonstra-o, não por $a + b$, mas por $a + b\sqrt{-1}$! E' uma extensão elegante, mas absurda...

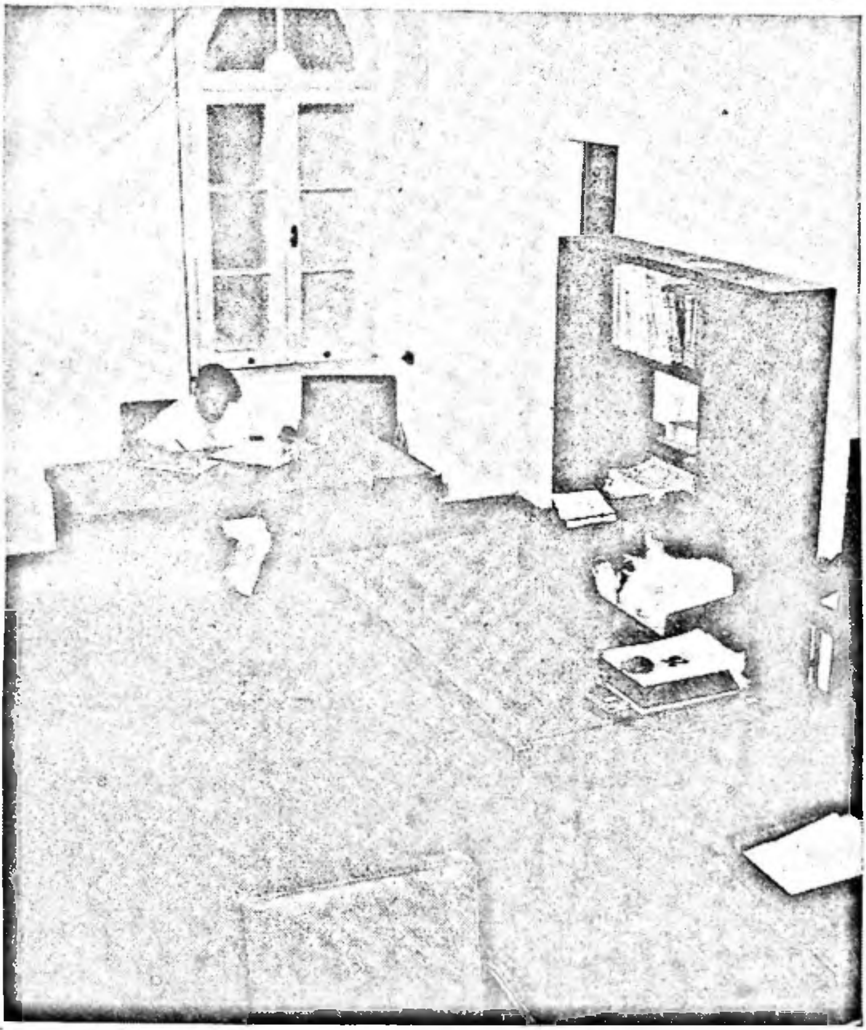
EULER — Eu gostaria que você o demonstrasse por um outro argumento mais convincente.

L. A. — Mestre, o senhor foi um grande teorista que "nos ajudou a vêr, no mundo matemático, mais do que o supúnhamos conter". Como um grande teorista, o senhor não pode ser um rotineiro e, se vivesse antes de Newton, poderia descobrir até, como êle descobriu, que a mesma fôrça "que faz girar a lua para cima, faz cair a maçã para baixo". Assim, o senhor não pode deixar de reconhecer o valor do argumento crucial que eu vou expor, a *contrario sensu*, provando, também, que as quantidades positivas não têm logaritmos *reais!*

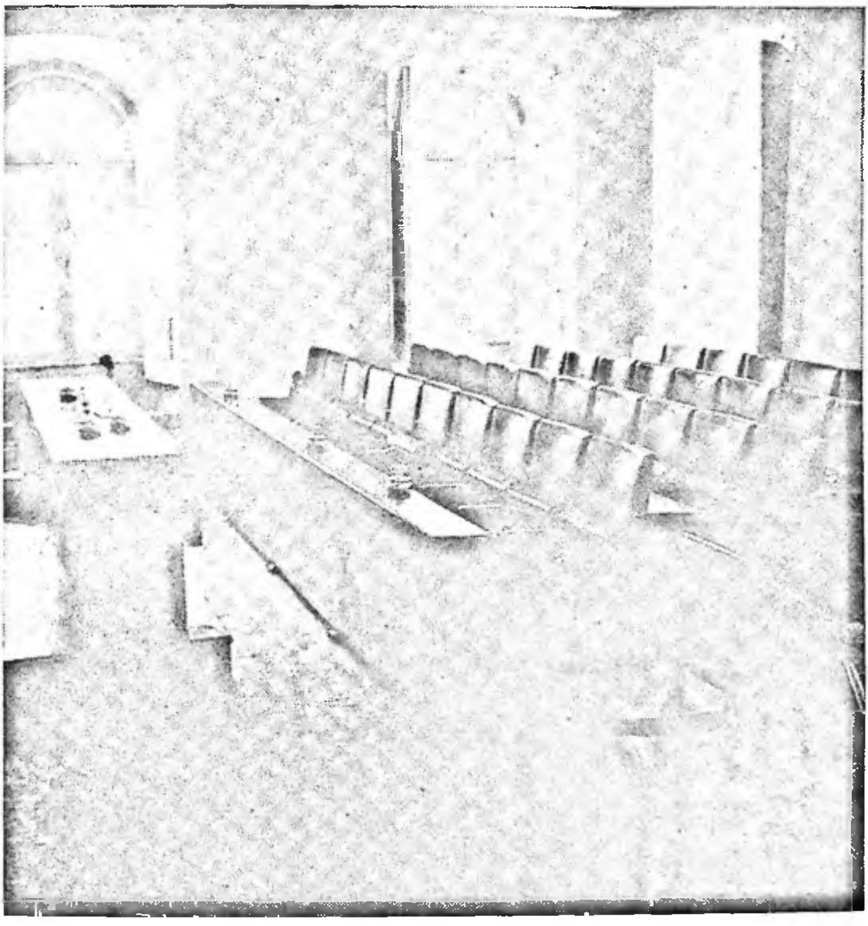
EULER — E' esta uma verificação que não me ocorreu, como não ocorreu a nenhum matemático, desde 1749 até esta data!

L. A. — Perdão! Até 1928, quando ela me ocorreu e foi objeto de comunicação ao Congresso de Matemáticos, reunido em Bolonha.

Para amenizar a aridez dêste diálogo, vamos supôr um mundo — Marte, lhe serve?! — em que os matemáticos trabalhassem, em suas operações principais, com grandezas *negativas*.



Secretaria



Sala de Congregação

I) Matematicamente nada impediria que os Neper dêsse planeta organizassem êste sistema de progressões que, em linguagem hegeliana, é a *antítese* do que serve de suporte ao nosso sistema neperiano:

$$\div\div -1 : -e : -e^2 : -e^3 \ldots\ldots x$$

$$\div \quad 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots y$$

II) Matematicamente ainda, nada impediria que, à semelhança da convenção terrena, definissem 1 como o logaritmo neperiano de — e; 2 como o logaritmo neperiano de $-e^2$, etc.

III) Tal convenção seria traduzida, algebricamente, assim:

$$y = \log' x = \log' \left[-\left(e^{y}\right) \right];\; x = -\left(e^{y}\right)$$

IV) Adaptando à "convenção marciana" a fórmula terrena (6), para o que devemos multiplicar por — 1 ambos os membros da expressão, sem alterá-la portanto, teríamos que o expoente de *e* seria, para aquêles matemáticos, o logaritmo neperiano de $-(a + b\sqrt{-1})$ o que se traduz nesta expressão:

$$\log' \left[-(a + b\sqrt{-1}\right] = \frac{1}{2} \log' (a^2 + b^2) + y\sqrt{-1}$$

Fazendo $b = o$, e substituindo y por $2k\pi + \varphi$, vem:

$$\log' (-a) = \log' A + (2k\pi + \varphi)\sqrt{-1}$$

I) Quando a é positivo, isto é, $a = A \cdot$ temos

$$\cos y = \frac{a}{A} = \frac{A}{A} = 1;\; y = 2k\pi,\; \varphi = 0$$

Consequentemente,

$$\log' (-A) = \log' A + 2k\pi\sqrt{-1}$$

resultado que a ciência da Terra só admite para o logaritmo de uma quantidade *positiva.* O princípio válido, então, na ciência de Marte, seria êste: *os logaritmos das quantidades negativas são tão reais como os logaritmos,* na Terra, *das quantidades positivas!*

II) Quando *a* é negativo, isto é, a = — A, temos

$$\cos y = \frac{a}{A} = \frac{-A}{A} = -1; \ \varphi = \pi, \ y = 2k\pi + \pi$$

Por conseguinte,

$$\log' (A) = \log' A + (2k + 1)\pi\sqrt{-1},$$

Os matemáticos de Marte chegariam, então, a esta conclusão: "As quantidades *positivas* não têm logaritmos reais"!

Que belo e desconcertante resultado, hein· Mestre? Tão desconcertante para nós outros, os terráquios, como seria, por exemplo, o a que chegariam aquêles sêres bi-dimensionais de Poincaré que rastejando sôbre um mundo esférico, chegassem à conclusão de que a sua geometria é diferente da geometria oficial aqui da Terra, por que, ali naquele mundo, a linha mais curta entre dois pontos (a "réta" dos seus geometras!) é o arco de círculo máximo e as paralelas se encontram!...

Agora, só em homenagem ao Mestre vou responder à ob jeção que me apresentou, há pouco. A expressão

$$a = e^{x} \times e^{y\sqrt{-1}}$$

não pode fornecer o logaritmo *real* da quantidade *negativa,* por isso que, se *y* é nulo, a grandeza *a* é positiva, o que contraria a hipótese, e, se *y* é diferente de zero, o logaritmo de *a* é *imaginário,* o que confirma a tése.

O que aconteceu com as generalizações da fórmula de Euler, acontece com essa própria fórmula, que tem o mesmo caráter de imperfeição. Assim o simples exame da concepção terrena e da concepção marciana nos leva às seguintes conclusões:

1.ª) A fórmula de Euler fornece o valor principal de + 1, que é e^0, e uma porção de valores cíclicos: $2\pi\sqrt{-1}$, e $4\pi\sqrt{-1}$, etc., mas não pode fornecer o valor principal de — 1.

2.ª A fórmula do Euler marciano fornece o valor principal de — 1, que é — e^0, e uma porção de valores cíclicos:

$2\pi\sqrt{-1}$ $4\pi\sqrt{-1}$

— e , — e, etc., mas não pode fornecer o valor principal de + 1.

3.ª) Por sua transformada logaritmica:

$$\log'(\cos x + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ x) = x\sqrt{-1},$$

a primeira fórmula não é própria para fornecer o logaritmo real de — 1.

4.ª) Por sua transformada logaritmica:

$$\log'\left[-(\cos x + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ x)\right] = x\sqrt{-1}$$

a segunda fórmula não é própria para fornecer o logaritmo real de + 1.

5.ª) Nestas condições, se impõem estas sínteses:

$$y = \log' x = \log'\left[\pm\left(e^{y}\right)\right]$$

$$x = \pm\, e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{m}}$$

$$x = \pm\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ \frac{2k\pi}{m}\right)$$

enfeixando estas duas fórmulas a solução das equações binômias.

Agora, o espírito genial do Mestre está vendo claramente o que isso significa: a fórmula de Euler — a *tese* — não é própria para fornecer o logaritmo *real* da quantidade negativa, do mesmo modo que a sua *antítese* — a fórmula marciana — não pode fornecer o logaritmo *real* de quantidade positiva.

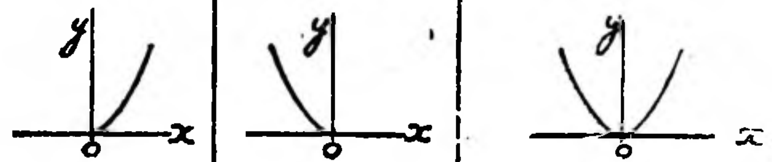
Fica, assim· cientificamente demonstrada a necessidade de uma *síntese,* que englobe a concepção terrena (*tese*) e a concepção marciana (*antítese*). Não acha?

EULER — Parece que assim deve ser. Em todo caso, como não tenho tempo disponível, lá em cima, para verificar minuciosamente tudo isso, vou enviar êsse diálogo, com as minhas recomendações, para estudo e parecer de uma instituição americana para o Avanço da Ciência.

L. A. — Ótimo. Pois então, junte, também, esta síntese que encerra, o mais esquematicamente possível, a comparação entre duas funções que têm interessantes pontos de contacto:

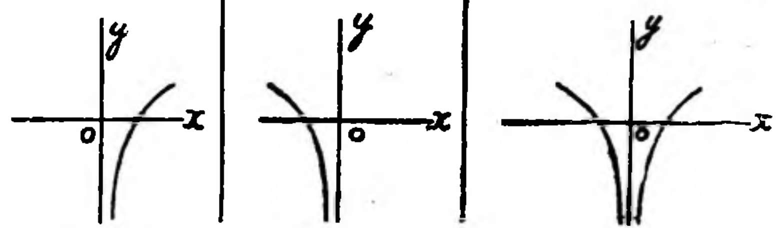
	TESE	*ANTITESE*	*SINTESE*
Tipo algebrico: $x = \pm\sqrt{y}$	$x = \sqrt{y}$	$x = -\sqrt{y}$	$y = x^2$

Pintura geométrica:



Tipo transcendente: $x = \pm e^y$	$x = e^y$	$x = -e^y$	$y = \log' x = \log' \pm (e^y)$

Pintura geométrica:



EULER — E' uma síntese bem interessante e que merece meditação interessada.

L. A. — Pois recomende-a, também, com o prestígio do seu nome imortal, a essa instituição de Avanço da Ciência.

O Mestre sabe quantas controvérsias atapetaram o caminho das quantidades negativas, tendo, até, um grande espírito, Leibnitz, acoimado de imaginárias as razões por quociente entre essas quantidades e as quantidades positivas. A despeito de tudo isso, elas triunfaram sôbre os preconceitos e sôbre os sofismas.

Medite sôbre esta apreciação de Klein: "La question sólo quedó aclarada cuando, ya en el siglo XIX, se observó que no se trataba de una necessidad logica de los nuevos conceptos, ni, por conseguinente, de demostrar la regla de los signos, sino simplemente, de reconocer que tales conceptos son logicamente admissibles aunque sean arbitrarios, y, lo mismo que el principio de permanencia, obedezcan a una simple razon de comodidad".

Na questão que estamos debatendo, ha necessidade lógica, há comodidade, há economia de pensamento, e a teoria é, igualmente, fecunda. Os logaritmos reais das quantidades negativas, além de *logicamente admissíveis,* decorrem inelutavelmente de provas cruciais.

Além disso e como um coroamento digno de uma teoria dêsse fôlego, vamos completar duas revoluções: a de Descartes e a de Euler.

EULER — A teoria comporta, efetivamente, algumas sutilezas, mas você, em tudo isso, é mais intuitivo do que lógico.

L. A. — Quando a lógica começa a produzir monstros, é necessário retomar o fio da intuição!

EULER — A sua dissertação deixa dúvidas, ainda, em meu espírito.

L. A. — Tanto vale a fôrça da rotina! Mas, essa rotina, que é aqui a "síntese de tôdas as renúncias", por que é a própria renúncia à vida e à extensão do pensamento, não pode esvasiar o cérebro privilegiado que revolucionou a Matemática, ao destronar o velho "tabú" do caráter unívoco dos logaritmos. Permita-me, então, que eu esgote o comentário com êste final da apreciação de Felix Klein: *"A veces las cosas parecen ser mas razonables que los hombres"!*

EULER — Contente-se, meu amigo, com esta afirmação: você conseguiu abalar uma crença que homens como Bernouilli e D'Alembert não conseguiram abalar!

L. A. — Graças a Deus!

Agora, desejará o mestre discutir comigo sôbre aquêle argumento sofístico com que procurou arrazar Bernouilli, naquela polêmica em que chegou a esta conclusão: "Por conseguinte, ninguém terá menos direito do que Bernouilli para sustentar, de hoje em diante, que o log (—1) seja igual a zero"?

EULER — Nesta altura parece que não é mais necessário. Entretanto, diga alguma coisa sôbre o assunto.

L. A. — Então, eu farei só êste pequeno resumo:

A fórmula simples de Euler fornece, com a maior segurança possível, logaritmos:

a) da quantidade positiva 1, por intermédio do logaritmo do cos x (grandeza real):

b) das grandezas imaginárias $\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$, por intermédio do logaritmo de sen x $\sqrt{-1}$ (grandeza imaginária).

Os logaritmos do item *b* podem ser vistos neste sistema de progressões:

$$\because 1 : \sqrt{-1} : -1 : -\sqrt{-1} : 1 : \sqrt{-1} : -1 : -\sqrt{-1} : 1 \quad \ldots\ldots$$

$$\div 0 . \frac{\pi}{2}\sqrt{-1} . \frac{3}{2}\pi\sqrt{-1} . 2\pi\sqrt{-1} . \frac{5}{2}\pi\sqrt{-1} . 3\pi\sqrt{-1} . \frac{7}{2}\pi\sqrt{-1} . 4\pi\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots \tag{13}$$

Isto pôsto, consideremos a famosa relação descoberta por Bernouilli:

$$\frac{\log' \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\pi}{2}$$

de cujas transformadas

$$\log' \sqrt{-1} = \frac{1}{2} \log' (-1) = \frac{\pi}{2} \sqrt{-1}$$

e

$$\log' (-1) = \pi \sqrt{-1}$$

se quer tirar aquela ilação de que o logaritmo de um número negativo é imaginário, repetindo-se a Bernouilli aquela sentença inexorável: "De hoje em diante, ninguém terá menos direito do que Bernoulli para sustentar que o log (—1) seja igual a zero".

Preliminarmente, nada tem a escala dos logaritmos correspondentes à quantidade reais com a escala dos logaritmos das quantidades imaginárias $\sqrt{-1} : -\sqrt{-1}$. Elas vêm de operações direfentes, como vemos nos itens *a* e *b*, e só se interpenetram, no campo dos logaritmos imaginários, por intermédio das potências de $\sqrt{-1}$. Tanto isto é verdade que, se o Mestre duvida, eu vou demonstrar, também, que o logaritmo de 1 é imaginário.

Com efeito, temos:

$$\log' (\sqrt{-1})^4 = \log' \sqrt{-1} = 2 \pi \sqrt{-1} \tag{15}$$

Como a quarta potência da $\sqrt{-1}$ é 1, eu poderia deduzir, também, que o log' (1) é imaginário... Mas, o fato algébrico traduz, simplesmente, isto: o 1.º logaritmo imaginário de 1, naquela escala, e 2 $\pi \sqrt{-1}$.

A propósito, eu não sei se o Mestre estende aos logaritmos das quantidades imaginárias as mesmas propriedades dos logaritmos das quantidades reais. As minhas idéias a respeito serão expendidas num trabalho posterior, onde eu estudarei, também, as repercussões que a teoria por mim proposta — e cujas primícias gerais ofereço, neste diálogo, à sua intuição e ao seu claro espírito matemático —vae causar sôbre o teorema da Côtes e o teorema de Moivre, sôbre os logaritmos das quantidades imaginárias, sôbre a resolução das equações binômias, etc. E' claro que, com a vertigem da vida moderna, eu não posso oferecer num mez, o que o senhor e seus contemporâneos levaram anos a fio para oferecer à ciência.

Por enquanto, basta que lhe diga isto: eu posso levar mais adiante a análise do exemplo que lhe ofereci em contradita, aproveitando a mesma propriedade que Leibnitz e o Mestre aproveitaram no argumento empregado contra Bernouilli. Assim:

$$\log' (\sqrt{-1})^4 = 4 \log' \sqrt{-1} = 4 \times \frac{1}{2} \log'(-1) =$$
$$= 2 \log' (-1)$$

donde

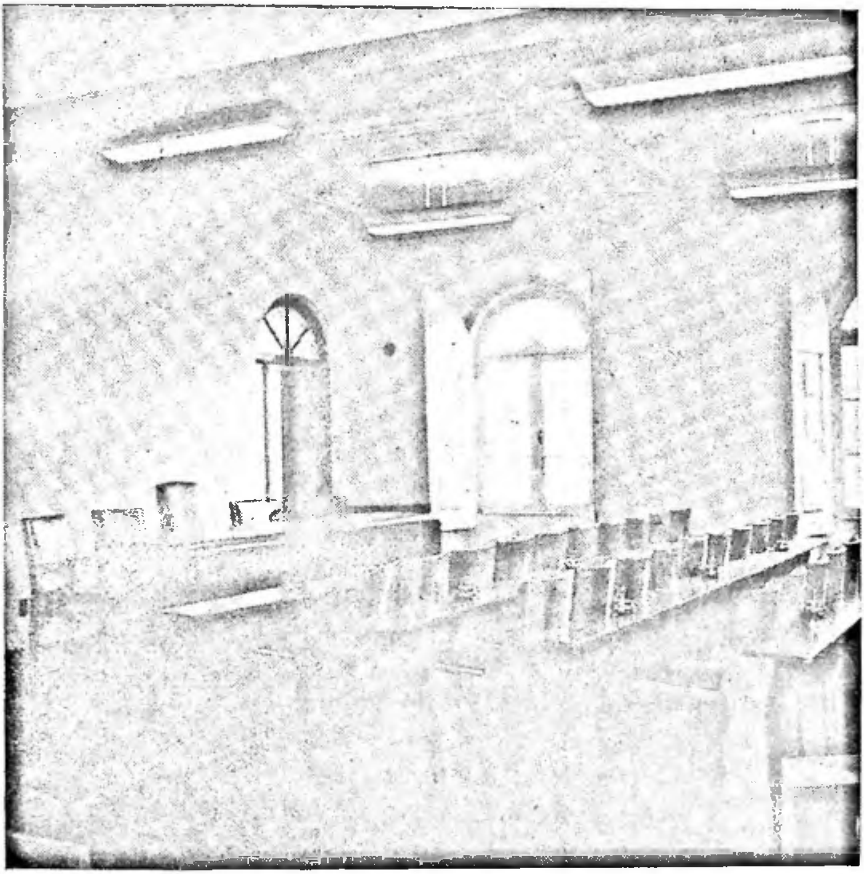
$$\log' (1) = 2 \log' (-1)$$

Se eu quisesse sofismar diria que isto é a prova, em sua teoria, de que o log' (1) é imaginário! . Empregaria, legitimamente, o mesmo argumento que empregaram contra Bernouilli. E não precisaria apelar para a ciência marciana, nem para os seus matemáticos...

Mas, o meu escopo aqui, em busca da verdade científica, é mais elevado. Êsse resultado traduz simplesmente que o 1.º logaritmo imaginário de 1, que é $2 \pi \sqrt{-1}$, é o dôbro do 1.º logaritmo imaginário de (—1), que é $\pi \sqrt{-1}$. E eu não preciso mostrar-lhe, no quadro negro, aquêle sistema (13), pois o melhor quadro negro é o luminoso quadro de sua intuição matemática!

EULER — Muito grato. Mas você está fazendo uma verdadeira mágica, com uma dialética sútil e diabólica...

L. A. — A verdadeira magia da Verdade. Removendo para mais além, um milímetro embora, as barreiras da Ciência, nem por isto a minha atitude deixa de ser como a de Newton: "Eu não sei o que posa perecer aos outros, mas, quanto a mim mesmo, eu me figuro como alguém que, à beira do mar, en-



Sala da Congregação

contra um seixo mais polido ou uma concha mais preciosa, quando, no entanto, tem diante de si, por explorar, o grande oceano da Verdade".

EULER — A sua dialética leva-o até à poesia...

L. A. — E', Mestre, mas deixe-me que aproveite a sua indulgência e bom humor para evocar uma das páginas mais brilhantes de Eddington — em "Estrêlas e Átomos" — onde êle fêz a comparação entre os vôos de Ícaro e de Dedalo: Dedalo, tímido e prudente, subiu pouco e desceu sem perigo. Foi celebrado. Ícaro, audacioso e destemido, dirigiu-se para o Sol, até que se lhe fundiu a cêra das azas. Foi vaiado.

"O prudente Dedalo aplica suas teorias só onde tem a certeza de não encontrar obstáculo, mas dêsse excesso de prudência resulta que seus defeitos permanecem desconhecidos. Ícaro leva as suas até o ponto de ruptura, onde as juntas fracas cedem. Por uma simples aventura. Talvez. Mas, se é destino seu não atingir o sol, podemos, pelo menos, tirar de sua viagem algumas indicações para construir uma máquina mais perfeita".

Mestre, uns fazem justiça ao seu gênio, repetindo e concordando. Na posição inclinada dos crentes. Outros fazem justiça ao seu gênio, divergindo e completando-o. Na posição vertical dos cientistas.

Os primeiros servem o Homem. Os últimos honram a Ciência.